MAESTRÍA EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y DE CONSTRUCCIÓN
UNIVERSITAT POLITÉCNICA DE CATALUNYA

TRABAJO N°09:
Axisymmetric shells and arches

Student:

Elvis Roberto Gomez Quispe

Using thin beams formulation, describe the shape of the $B_{(e)}$ matrix and comment the integration rule.

Para el caso de arcos planos la formulación de elementos finitos se puede desarrollar en forma de un caso particular de cascarones axisimétricas que ignoran los efectos circunferenciales.

A continuación se muestra un arco plano definido por la línea media del eje vertical de la sección transversal.

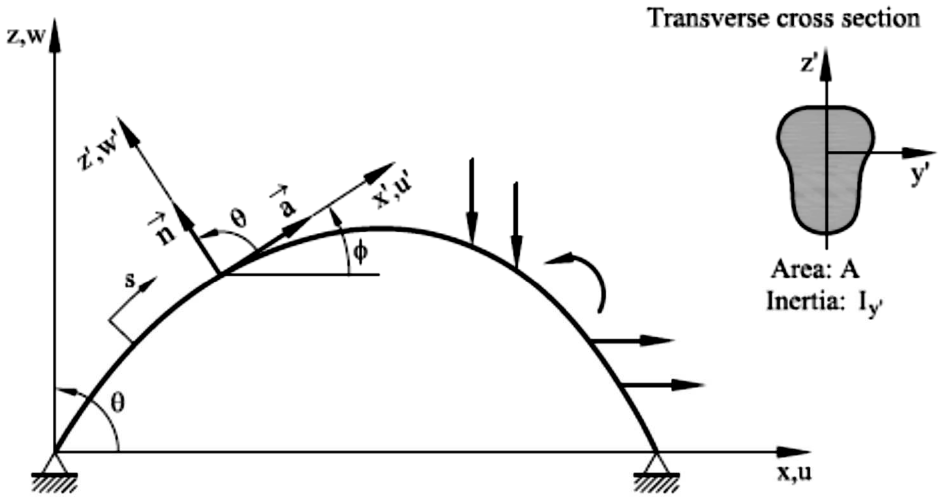


Fig. 9.31 Description of a plane arch

Se puede observar que en el campo de desplazamiento de un punto se define por el campo tangencial y los desplazamientos normales además de la rotación del vector normal.

Así también el vector de la deformación local generalizada contiene la elongación del eje medio λ, la curvatura κ y la deformación transversal γ definida como:

$$\hat{\varepsilon}' = \begin{Bmatrix} \lambda \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0'}{\partial s} - \dfrac{w_0'}{R_s} \\ -\dfrac{\partial \theta}{\partial s} \\ \dfrac{\partial w_0'}{\partial s} + \dfrac{u_0'}{R_s} - \theta \end{Bmatrix}$$

Para elementos rectos tendremos:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0'}{\partial s} \\ -\dfrac{\partial \theta}{\partial s} \\ \dfrac{\partial w_0'}{\partial s} - \theta \end{Bmatrix}$$

La ecuación anterior contiene en la primera fila a la deformación axial de un elemento de barra, y en la segunda y tercer a fila a las dos deformaciones de flexión del elemento de la viga de Timoshenko. Para el caso de material homogéneo considerado aquí, axial y de flexión los efectos se disocian a nivel de elemento. El acoplamiento se produce después del montaje de las matrices de rigidez de los elementos locales.

La discretización sigue procedimientos estándar. Para un elemento nodulado

$$\mathbf{u} = [u_0', w_0', \theta]^T = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i^{(e)}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i' \ \mathbf{a}_i'^{(e)} = \mathbf{B}'\mathbf{a}'^{(e)}$$

$$\mathbf{B}_i' = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\partial N_i}{\partial s} \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial s} & -N_i \end{bmatrix} ; \qquad \mathbf{a}_i'^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_{o_i}' \\ w_{o_i}' \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

La ecuación constitutiva para el material isotrópico homogéneo es la siguiente

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & kGA \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \hat{\mathbf{D}}' \ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'$$

Donde A es el área de la sección transversal e Iy el momento de inercia respecto al eje de coordenadas transversales.

La matriz de rigidez local es:

$$\mathbf{K}_{ij}'^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \mathbf{B}_i'^T \ \hat{\mathbf{D}}' \ \mathbf{B}_j' \ dx'$$

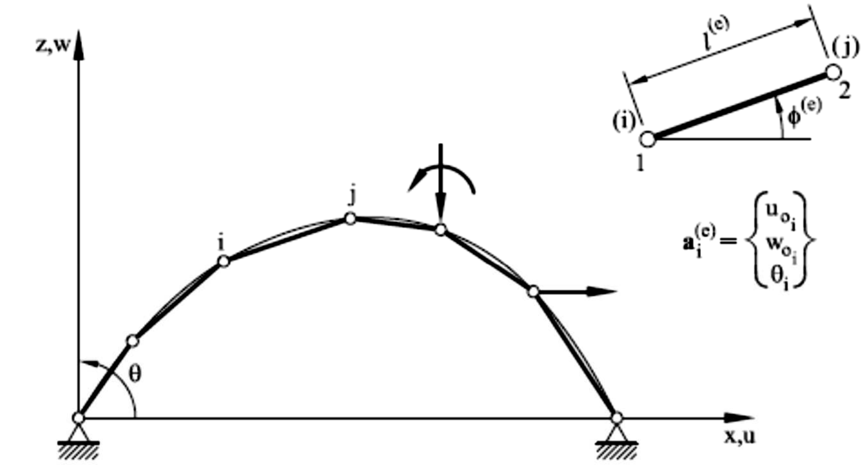
La transformación de la rigidez a ejes globales queda como:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \ \hat{\mathbf{D}}' \ \mathbf{B}_j \ dx$$

El elemento de arco plano más simple es el elemento de arco de 2 nodos con un punto de integración reducida uniforme. La matriz de rigidez global viene dada por:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \bar{\mathbf{B}}_i^T \bar{\hat{\mathbf{D}}}' \bar{\mathbf{B}}_j l^{(e)}$$

Donde el símbolo de (-) indica valores en el punto medio del elemento. La forma explícita de la matriz de rigidez se muestra a continuación:



$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = l^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{i+j}}{(l^{(e)})^2}(d_{11}C^2 + d_{33}S^2) & \frac{(-1)^{i+j}}{(l^{(e)})^2} SC(d_{11} - d_{33}) & \frac{(-1)^i}{2l^{(e)}} S d_{33} \\ \frac{(-1)^{i+j}}{(l^{(e)})^2} SC(d_{11} - d_{33}) & \frac{(-1)^{i+j}}{(l^{(e)})^2}(d_{11}S^2 + d_{33}C^2) & -\frac{(-1)^i}{2l^{(e)}} d_{33} \\ \frac{(-1)^j}{2l^{(e)}} S d_{33} & -\frac{(-1)^j}{2l^{(e)}} C d_{33} & \frac{d_{33}}{4} + \frac{(-1)^{i+j}}{l^{(e)}} d_{44} \end{bmatrix}$$

$S = \ \sin \phi^{(e)}, C = \cos \phi^{(e)}$

d_{ij} = elements of $\hat{\mathbf{D}}'$ of Eq. (9.138) computed at the element mid-point.

El vector de fuerza nodal equivalente es:

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \mathbf{N}_i \mathbf{t}^{(e)} dx' + \mathbf{p}_i^{(e)}$$

Los elementos de arco curvo se pueden derivar siguiendo una argumentación dada. La matriz de deformación generalizada incluye ahora el efecto de la curvatura del arco, es decir:

$$\mathbf{B}_i' = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} & -\frac{N_i}{R_s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{N_i}{R_s} & \frac{\partial N_i}{\partial s} & -N_i \end{bmatrix}$$