MAESTRÍA EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y DE CONSTRUCCIÓN
UNIVERSITAT POLITÉCNICA DE CATALUNYA

TRABAJO N°04:
Structures of Revolution

Student:

Elvis Roberto Gomez Quispe

"Structures of revolution"

Assignment 4.1

1. Compute the entries of $\mathbf{K}^e$ for the following axisymmetric triangle:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = r_3 = a, \quad z_1 = z_2 = 0, \quad z_3 = b$$

The material is isotropic with $\nu = 0$ for which the stress-strain matrix is,

$$\boldsymbol{E} = E\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Show that the sum of the rows (and columns) 2, 4 and 6 of $\mathbf{K}^e$ must vanish and explain why. Show as well that the sum of rows (and columns) 1, 3 and 5 does not vanish, and explain why.

3. Compute the consistent force vector $\mathbf{f}^e$ for gravity forces $\mathbf{b} = [0, -g]^T$.

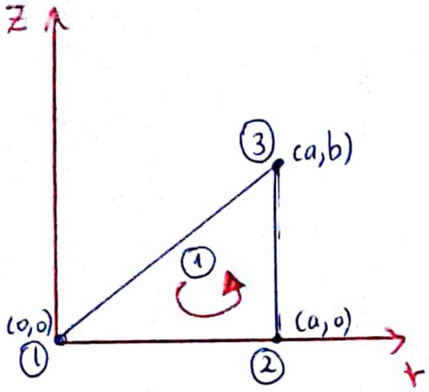
Date of Assignment: 26 / 02 / 2018
Date of Submission: 5 / 03 / 2018

The assignment must be submitted as a pdf file named **As4-Surname.pdf** to the CIMNE virtual center.

Assignment 4.1

Pregunta 1.

* Tendremos el siguiente plano:



Conectividad:

elemento	I	II	III
1	1	2	3

Nodos:

Nodo	r	z
1	0	0
2	a	0
3	a	b

* Considerando la energía potencial Π sobre una región discretisada esta dada por

$$\Pi = \sum_e \left[\frac{1}{2} \left(2\pi \int_e \varepsilon^T D . \varepsilon . r \, dA\right) - 2\pi \int_e u^T f r \, dA - 2\pi \int_e u^T T r \, dl \right] - \sum u_i^T P_i$$

donde la energía de deformacion unitaria U_e del elemento; dada por el 1° termino puede escribirse como: $U_e = \frac{1}{2} q^T \left(2\pi \int_e B^T D . B r \, dA\right) q$

Donde; la cantidad dentro del parentesis corresponde ala matriz del elemento:

$$K^e = 2\pi \int_e B^T E B r \, dA$$

Donde:

Relacion esfuerzo - desplazamiento:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{z_{23}}{\det(J)} & 0 & \frac{z_{31}}{\det(J)} & 0 & \frac{z_{12}}{\det(J)} & 0 \\ 0 & \frac{r_{32}}{\det(J)} & 0 & \frac{r_{13}}{\det(J)} & 0 & \frac{r_{21}}{\det(J)} \\ \frac{r_{32}}{\det(J)} & \frac{z_{23}}{\det(J)} & \frac{r_{13}}{\det(J)} & \frac{z_{13}}{\det(J)} & \frac{r_{21}}{\det(J)} & \frac{z_{12}}{\det(J)} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Elasticidad:

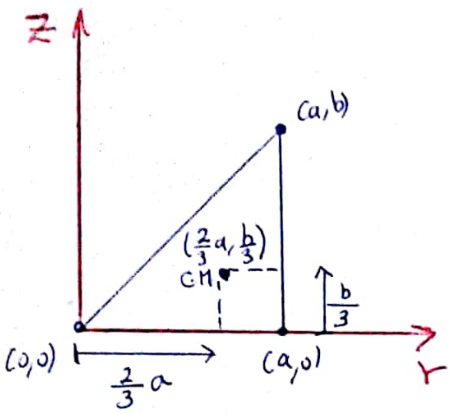
$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde para nuestro caso:

$$D = E = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

* Como una aproximación "B" y "r" se evaluarán en el centroide del Triángulo, para posteriormente usarse como valores representativos para el Triángulo; por lo que tendremos:



De lo visto en los triangulos de deformacion constante: para el caso del plano r,z:

$$r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3$$
$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3$$

Expresando las funciones de forma en terminos de coordenadas naturales:

$$r = \xi r_1 + \eta r_2 + (1-\xi-\eta) \cdot r_3$$
$$z = \xi z_1 + \eta z_2 + (1-\xi-\eta) \cdot z_3$$

Ahora evaluamos las funciones de forma respecto al centroide:

$$\frac{2}{3}a = \xi(0) + \eta(a) + (1-\xi-\eta)(a) = a(\eta) + a - \xi a - \eta a$$
$$\frac{b}{3} = \xi(0) + \eta(0) + (1-\xi-\eta)(b) = b - \xi b - \eta b$$

Desarrollando: $\xi = \frac{1}{3}$; $\eta = \frac{1}{3}$

Por lo tanto: $N_1 = \xi = \frac{1}{3}$; $N_2 = \eta = \frac{1}{3}$; $N_3 = 1 - \xi - \eta = \frac{1}{3}$

luego $r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3 = \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(a) + \frac{1}{3}(a) = \frac{2}{3}a$; $r = \frac{2}{3}a$

Considerando los valores obtenidos, podremos conformar la matriz "B":

$$B = \begin{bmatrix} \frac{(0-b)}{a.b} & 0 & \frac{(b-0)}{a.b} & 0 & \frac{(0-0)}{a.b} & 0 \\ 0 & \frac{(a-a)}{a.b} & 0 & \frac{(0-a)}{a.b} & 0 & \frac{(a-0)}{a.b} \\ \frac{(a-a)}{a.b} & \frac{(0-b)}{a.b} & \frac{(0-a)}{a.b} & \frac{(b-0)}{a.b} & \frac{(a-0)}{a.b} & \frac{(0-0)}{a.b} \\ \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} & 0 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

De lo anterior, podremos hallar la matriz de Rigidez:

$$K_e = 2\pi \cdot r \cdot A \cdot B^T \cdot E \cdot B$$

$$K_e = 2\pi\left(\frac{2a}{3}\right)\left(\frac{a.b}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{2a} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{2a} \\ 0 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{2a} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \frac{2\pi . a^2 b}{3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{4a} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{4a} \\ 0 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{4a} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \frac{2\pi . a^2 b}{3} \begin{bmatrix} \frac{9}{8a^2} & 0 & -\frac{7}{8a^2} & 0 & \frac{1}{8a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{ab} & -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{ab} & 0 \\ -\frac{7}{8a^2} & \frac{1}{ab} & \frac{9}{8a^2}+\frac{1}{b^2} & -\frac{1}{ab} & -\frac{1}{b^2}+\frac{1}{8a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{ab} & \frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2} & \frac{1}{ab} & -\frac{1}{b^2} \\ \frac{1}{8a^2} & -\frac{1}{ab} & -\frac{1}{b^2}+\frac{1}{8a^2} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{b^2}+\frac{1}{8a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Pregunta 2.

* Sumamos las filas y Columnas 2, 4 y 6 de la Matriz de Rigidez "Ke":
Al ser la matriz simétrica Tendremos:

En F_2 y C_2 $\rightarrow$ $0 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{ab} = 0$

En F_4 y C_4 $\rightarrow$ $0 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{ab} + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{1}{ab} - \frac{1}{b^2} = 0$

En F_6 y C_6 $\rightarrow$ $-\frac{1}{b^2} \ \frac{1}{b^2} = 0$

* Así tambien sumamos las filas y Columnas 1, 3 y 5 de la matriz de Rigidez "Ke"; Al ser la matriz simétrica tendremos:

En F_1 y C_1 $\rightarrow$ $\frac{9}{8a^2} - \frac{7}{8a^2} + \frac{1}{8a^2} = \frac{3}{8a^2}$

En F_3 y C_3 $\rightarrow$ $-\frac{7}{8a^2} + \frac{1}{a.b} + \frac{9}{8a^2} \ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{8a^2} = \frac{3}{8a^2}$

En F_5 y C_5 $\rightarrow$ $\frac{1}{8a^2} - \frac{1}{a.b} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{8a^2} + \frac{1}{a.b} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{8a^2} = \frac{3}{8}a^2$

Scanned by CamScanner

Pregunta 3.

El vector de fuerzas externas "fe" se define como:

$$f^{(e)} = f_b^{(e)} + f_q^{(e)} + f_p^{(e)}$$

i) Vector de fuerzas concentradas equivalente a las fuerzas másicas:

$$f_b^{(e)} = 2\pi \iint_A N^T . b . r \, dr \, dz$$

ii) Vector de fuerzas concentradas equivalente a las superficiales:

$$f_q^{(e)} = 2\pi \sum_{m=1}^{n} \oint r N_m^T q^{(m)} ds$$

iii) Vector de fuerzas concentradas equivalente a las fuerzas distribuidas circularmente:

$$f_p^{(e)} = 2\pi r \, p^{(e)}$$

* Considerando para nuestro caso: $b = [0, -g]^T$

la cual actuará en el centro de masa del elemento; para la cual se consideraran valores hallados anteriormente (funciones de forma):

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3} \quad ; \quad r = \frac{2}{3} a$$

⇒ Como solo se considerará la accion de la gravedad; tendremos que el valor de la fuerza externa será:

$$f^{(e)} = f_b^e = 2\pi \iint_A N^T . b . r . dr dz$$

$$f^e = 2\pi \iint_A \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} . \frac{2}{3} a \, dr.dz = 2\pi \iint_A \frac{2}{3} a \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} . dr.dz$$

$$f^e = \frac{4\pi a}{3} \iint_A \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{3} \\ 0 \\ -\frac{g}{3} \\ 0 \\ -\frac{g}{3} \end{bmatrix} dr dz \qquad f^e = \frac{4\pi . a}{3} . A_e \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{3} \\ 0 \\ -\frac{g}{3} \\ 0 \\ -\frac{g}{3} \end{bmatrix} \qquad f^e = \frac{4\pi a^2 . b}{18} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \\ -g \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner