MAESTRÍA EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y DE CONSTRUCCIÓN
UNIVERSITAT POLITÉCNICA DE CATALUNYA

TRABAJO N°01: THE DIRECT STIFFNESS METHOD

Student:

Elvis Roberto Gomez Quispe

Assignment 1.1

On “The Direct Stiffness Method”

Consider the truss problem defined in the figure 1.1. All geometric and material properties: L, α, E and A, as well as the applied forces P and H are to be kept as variables. This truss has 8 degrees of freedom, with six of them removable by the fixed-displacement conditions at nodes 2, 3 and 4. This structure is statically indeterminate as long as $\alpha \neq 0$.

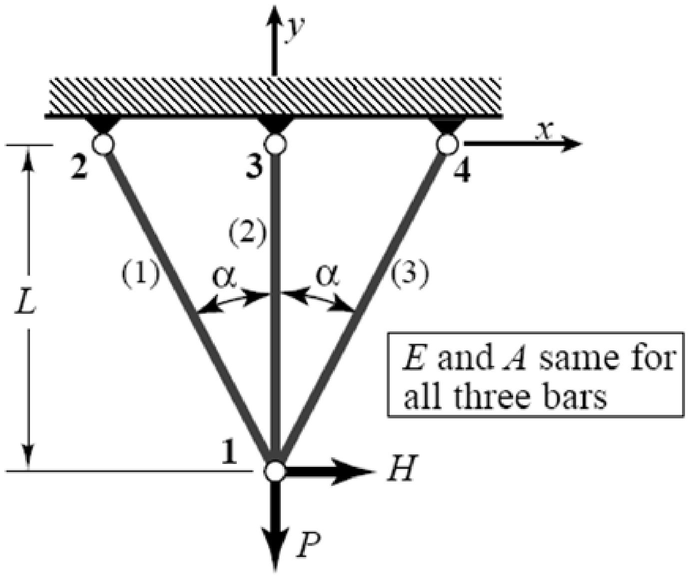


Figure 1.1.- Truss structure. Geometry and mechanical features

1. Show that the master stiffness equations are,

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2cs^2 & 0 & -cs^2 & c^2s & 0 & 0 & -cs^2 & -c^2s \\ & 1+2c^3 & c^2s & -c^3 & 0 & -1 & -c^2s & -c^3 \\ & & cs^2 & -c^2s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & c^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & cs^2 & c^2s \\ \text{symm} & & & & & & & c^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in which c = cosα and s = sinα. Explain from physics why the 5th row and column contain only zeros.

2. Apply the BC's and show the 2-equation modified stiffness system.

3. Solve for the displacements u_{x1} and u_{y1}. Check that the solution makes physical sense for the limit cases $\alpha \to 0$ and $\alpha \to \pi/2$. Why does u_{x1} "blow up" if $H \neq 0$ and $\alpha \to 0$?

4. Recover the axial forces in the three members. Partial answer: $F^{(3)} = -H/(2s) + Pc^2/(1+2c^3)$. Why do $F^{(1)}$ and $F^{(3)}$ "blow up" if $H \neq 0$ and $\alpha \to 0$?

5. Dr. Who proposes "improving" the result for the example truss of the 1st lesson by putting one extra node, 4 at the midpoint of member (3) 1-3, so that it is subdivided in two different members: (3) 1-4 and (4) 3-4. His "reasoning" is that more is better. Try Dr. Who's suggestion by hand computations and verify that the solution "blows up" because the modified master stiffness is singular. Explain physically.

<u>Assignment 1.2</u>

Dr. Who proposes "improving" the result for the example truss of the 1st lesson by putting one extra node, 4 at the midpoint of member (3) 1-3, so that it is subdivided in two different members: (3) 1-4 and (4) 3-4. His "reasoning" is that more is better. Try Dr. Who's suggestion by hand computations and verify that the solution "blows up" because the modified master stiffness is singular. Explain physically.

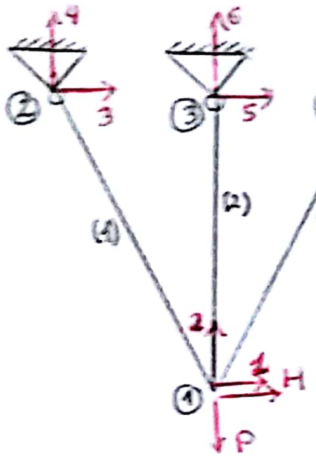
Date of Assignment: **5 / 02 / 2018**
Date of Submission: **12 / 02 / 2018**

The assignment must be submitted as a pdf file named **As1-Surname.pdf** to the CIMNE virtual center.

Parte ①

Solución:

* Considerando la numeración:



+ Considerando la Rigidez Directa:

$$[F]_{8\times 1} = [K]_{8\times 8}[X]_{8\times 1}$$

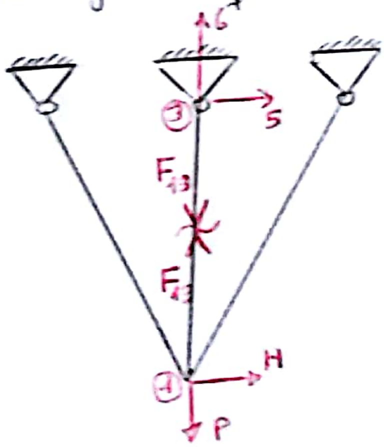
Tendremos:

$$\frac{E.A}{L}\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 2cs^2 & 0 & -cs'^2 & c^2s' & 0 & 0 & -cs'^2 & -c^2s' \\ 2 & & 1+2c^3 & c^2s' & -c^3 & 0 & -1 & -c^2s' & -c^3 \\ 3 & & & cs'^2 & -c^2s' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & & & & c^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ 7 & & & & & & & cs'^2 & c^2s' \\ 8 & \text{Simetrico} & & & & & & & c^3 \end{array}\begin{bmatrix} \mu_{x1} \\ \mu_{y1} \\ \mu_{x2} \\ \mu_{y2} \\ \mu_{x3} \\ \mu_{y3} \\ \mu_{x4} \\ \mu_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como observamos, para que se cumpla: $K_{5j} = K_{i5} = 0$ $\quad i = 1, 2, \dots 8$; $j = 1, 2, \dots 8$

Se deberá cumplir que no hay cargas que afecten la coordenada ⑤, de tal manera no se requiera su rigidez.

* Considerando la regla de equilibrio en nodos, Tendremos en el nodo ③:



$\therefore$ $F_{3y} = F_{13} \wedge F_{3x} = 0$

$\Rightarrow$ No habran fuerzas que actuen en coordenada ⑤

$\Rightarrow$ Tendremos: $K_{5j} = K_{i5} = 0$ $\quad i = 1, 2, \dots 8$; $j = 1, 2, \dots 8$

Scanned by CamScanner

Parte 2.

Solución:

* Considerando las condiciones de borde, la matriz de rigidez se condensará, y quedará de la siguiente manera:

$$
\frac{EA}{L}
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
2cs^2 & 0 & -cs^2 & c^2s & 0 & 0 & -cs^2 & -c^2s \\
 & 1+2c^3 & c^2s & -c^3 & 0 & -1 & -c^2s & -c^3 \\
 & & cs^2 & -c^2s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & c^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 \\
 & \text{Simétrico} & & & & & cs^2 & c^2s \\
 & & & & & & & c^3
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} H \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

* Pudiendose presentar las ecuaciones:

$$
\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 2cs^2 & 0 \\ 0 & 1+2c^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ -P \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2cs^2 \cdot \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & (1+2c^3)\frac{EA}{L} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} H \\ -P \end{bmatrix}
$$

Parte ③

Solución:

$$\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2cs^2 \cdot \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & (1+2c^3)\frac{E.A}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H \\ -P \end{bmatrix}$$

* Empleamos el metodo de gauss para calcular la inversa:

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 2cs^2\frac{EA}{L} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (1+2c^3)\frac{EA}{L} & 0 & 1 \end{array}\right| \xrightarrow[f_2 \times \frac{L}{(1+2c^3)EA}]{f_1 \times \frac{L}{2cs^2EA}} \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{L}{2cs^2E.A} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{L}{(1+2c^3)EA} \end{array}\right|$$

luego Tendremos:

$$\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2cs^2E.A} & 0 \\ 0 & \frac{L}{(1+2c^3).EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ -P \end{bmatrix}$$

desarrollando:

$$u_{x1} = \frac{H.L}{2cs^2E.A}$$

$$u_{y1} = \frac{-L.P}{(1+2c^3)EA}$$

luego evaluaremos para las tendencias; en un contexto de límites:

$$\alpha \to 0 \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0}(u_{x1}) = \infty \\ \lim\limits_{\alpha\to 0}(u_{y1}) = \frac{-L.P}{3EA} \end{cases}$$

$$\alpha \to \frac{\pi}{2} \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}}(u_{x1}) = \infty \\ \lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}}(u_{y1}) = \frac{-L.P}{EA} \end{cases}$$

* Notamos que para $u_{x1} = \infty$, para $H \neq 0$ y $\alpha \to 0$, lo cual se da, Toda vez que conforme $\alpha \to 0$, se irá canalando las fuerzas de equilibrio; por lo que se perderá una de las reglas, es decir la del equilibrio; por lo que tendrá al desplazamiento como se aprecia:

equivale a:

Parte 4

Solución:

+ Considerando el valor de: $F^{(3)} = \frac{-H}{2S} + \frac{P.c^2}{(1+2c^3)}$ .... (a)

* Considerando la hipotesis de equilibrio, podremos plantear el equilibrio de fuerzas en el nodo ①:

$\Sigma F_x = 0$: $F^{(3)} . S = H + F^{(1)} . S$ .... (b)

$\Sigma F_y = 0$: $F^{(2)} + F^{(1)} . c + F^{(3)} . c = P$ .... (c)

Reemplazando (a) en (b):

$$F^{(1)} = \frac{F^{(3)} S - H}{S} = \frac{\left(\frac{-H}{2S} + \frac{Pc^2}{(1+2c^3)}\right) S - H}{S} = \boxed{\frac{-3H}{2S} + \frac{Pc^2}{(1+2c^3)}}$$

$$F^{(2)} = P - F^{(1)} . c - F^{(3)} . c = P - c\left(F^{(1)} + F^{(3)}\right)$$

$$F^{(2)} = P - c\left(\left(\frac{-3H}{2S} + \frac{Pc^2}{(1+2c^3)}\right) + \left(\frac{-H}{2S} + \frac{P.c^2}{1+2c^3}\right)\right)$$

$$F^{(2)} = P - c\left(-\frac{2H}{S} + \frac{2.P.c^2}{(1+2c^3)}\right)$$

$$F^{(2)} = P + \boxed{\frac{2H.C}{S} - \frac{2Pc^3}{(1+2c^3)}}$$

* ahora evaluamos $\alpha \to 0$, en un contexto de limites:

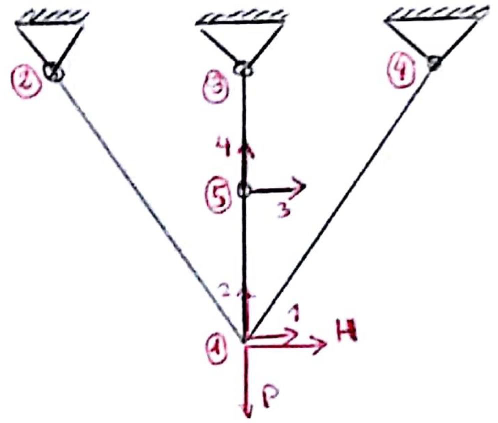
$\lim_{\alpha \to 0} (F^{(1)}) = \infty$; $\lim_{\alpha \to 0} (F^{(3)}) = \infty$

$\lim_{\alpha \to 0} (F^{(2)}) = \infty$

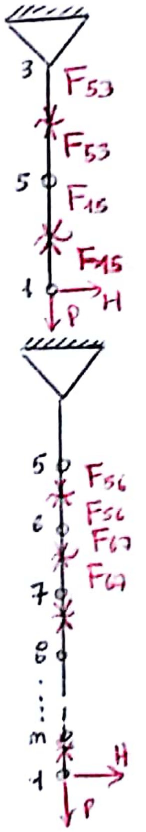
+ Notamos que las fuerzas axiales en las barras $F^{(1)}$ y $F^{(3)}$ son ∞ para $H \neq 0$ y cuando $\alpha \to 0$

Parte (5)

Solución



* Entonces verificamos la sugerencia del doctor Who:
* Respecto a las fuerzas Axiales:



Observamos que considerando la hipotesis de equilibrio, observamos en el nodo (5) lo siguiente:

$$\Sigma F_y = 0 : \quad F_{53} = F_{15}$$

Entonces, nota que la fuerza axial será la misma ahora si consideramos; muchos nodos, observamos que los valores de la fuerza axial será la misma; por lo que notamos que no será necesario incrementar nodos entre los extremos para conocer resultados mas adecuados ó detallados

$$\Sigma F_y = 0 : \quad F_{56} = F_{67} = \ldots = F_{m1}$$

* Respecto al desplazamiento

Considerando las ecuaciones de rigidez:

$$[F] = [K].[X]$$

$$[X] = [K]^{-1}[F]$$

condensando la matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} \mu_{1x} \\ \mu_{1y} \\ \mu_{5x} \\ \mu_{5y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -P \\ H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

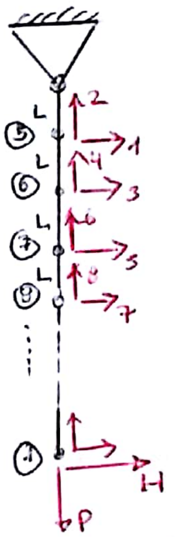
luego podremos conocer los valores de los desplazamientos:

$$u_{5x} = -K'_{31}\cdot P + K'_{32}\cdot H$$

$$u_{5y} = -K_{41}\cdot P + K'_{42}\cdot H$$

$\Rightarrow$ Observamos que si asignamos nodos, podremos conocer a detalle, el valor de los desplazamientos en el interior de la barra, por lo que convendría asignar nodos.

\# Ahora verificamos la singularidad de la matriz de rigidez, considerando el incremento de nodos:



considerando la matriz de Rigidez:

$$[F] = [K][X]$$

$$[X] = [K]^{-1}\cdot[F]$$

considerando que para que la matriz de rigidez sea singular; se deberá cumplir:

$$|K| = 0$$

así tambien considerando; la matriz de rigidez:

$$K = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} a\cdot\frac{E\cdot A}{L} & b\cdot\frac{EA}{L} & c\frac{EA}{L} & d\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b\cdot\frac{EA}{L} & e\frac{E\cdot A}{L} & f\frac{EA}{L} & g\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c\frac{E\cdot A}{L} & f\frac{EA}{L} & h\frac{EA}{L} & i\frac{EA}{L} & & & & \vdots \\ d\frac{EA}{L} & g\frac{EA}{L} & i\frac{EA}{L} & j\frac{EA}{L} & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & & \cdots & & \end{array}\right] \end{array}$$

Observaremos la forma de la banda escalonada, resultado de la asignación de coordenadas consecutivas de las cantidad de nodos asignados; ahora procedemos a hallar la determinante de la matriz de rigidez condensada.

Para lo cual aplicamos el metodo de los cofactores:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 & \cdots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & \cdots & & \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & \cdots & & \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & \cdots & & \\ 0 & 0 & K & K & & & \\ 0 & 0 & K & K & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & & & \end{bmatrix}$$

$$|K| = (-1)^{1+1} \cdot \left(a \frac{E.A}{L}\right) \cdot |K'| + (-1)^{2+1} \cdot \left(b \cdot \frac{EA}{L}\right) \cdot |K''| + (-1)^{3+1} \cdot \left(c \cdot \frac{EA}{L}\right) \cdot |K'''|$$

$$+ (-1)^{4+1} \cdot \left(d \cdot \frac{E.A}{L}\right) \cdot |K^{IV}|$$

Ahora considerando $L \to 0$; en un contexto de Limites:

$$\lim_{L \to 0} (|K|) = (+1)(\infty) + (-1)(\infty) + (+1)(\infty) + (-1)(\infty)$$

$$\lim_{L \to 0} (|K|) = 0$$

Por lo que tendremos que con la continua modificacion dela estructura incorporando nodos; induciremos a la formacion de una matriz de Rigidez singular, es decir sin inversa.