ALBA NAVARRO CASANOVA
47984466-A

Homework 2: Bernoulli's equation and Irrotational flow

EJERCICIO 1

① a) y b) $V_r = C_1 r$ for $r < a$

$V_r = \frac{C_2}{r}$ for $r > a$

evaluate the constant and in terms of the parameters h, a, V

$$V = \begin{Bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(r) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$Q = \pi r^2 \cdot \text{velocity} = \pi a^2 V$ velo de admisión

El punto P es un punto de estancamiento con presión máxima:

$$p(r=0) = P_{stag} = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2 + (\rho g H)$$

y para $r>a$ tenemos flujo radial puro, no hay aceleración centrípeta, no hay aceleración a través de las líneas de corriente, entonces:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{campo de presión} \neq \text{función de } \theta$$

en el flujo interno las líneas de corriente son curvas, hay un gradiente de presión normal a la líneas de corriente donde que la presión decrece hacia el centro de la curvatura. Esperamos: $P_S < P_Q < P_P$

La presión de estancamiento es la máxima en el sistema.

Velocity field: $V_r = \begin{cases} C_1 r & r \leq a \\ C_2 / r & r \geq a \end{cases}$

La segunda condición se debe porque para $r>a$ el balance de masa nos da:

$$\pi a^2 V = Q = 2\pi h V_r$$

$$\text{o} \quad V_r = \frac{a^2 V}{2hr} \Rightarrow C_2 = \frac{a^2 V}{2h}$$

Igualando velocidades en radio $= r = a$ tenemos $C_1 a = \frac{a^2 V}{2ha}$

$$C_1 = \frac{V}{2h}$$

Pressure field

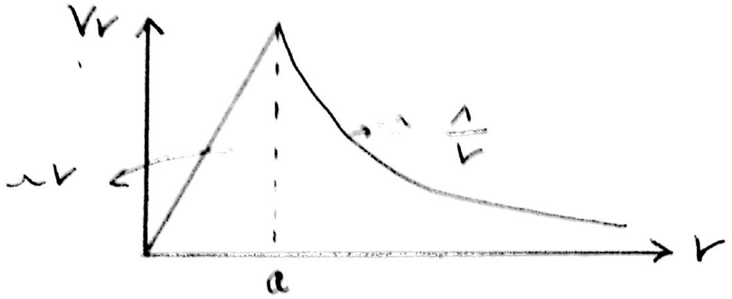
Aplicamos la ecuación de Bernoulli a lo largo de la streamline PQR (e ignoramos $\rho g z$). Tenemos:

$$p_T = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2 = p(r) + \frac{1}{2}\rho\left[\overset{v_r}{V_r(r)}\right]^2$$

o sustituyendo para $\underset{v_r}{V_r}$ en esta región $r<a$, $r>a$ obtenemos:

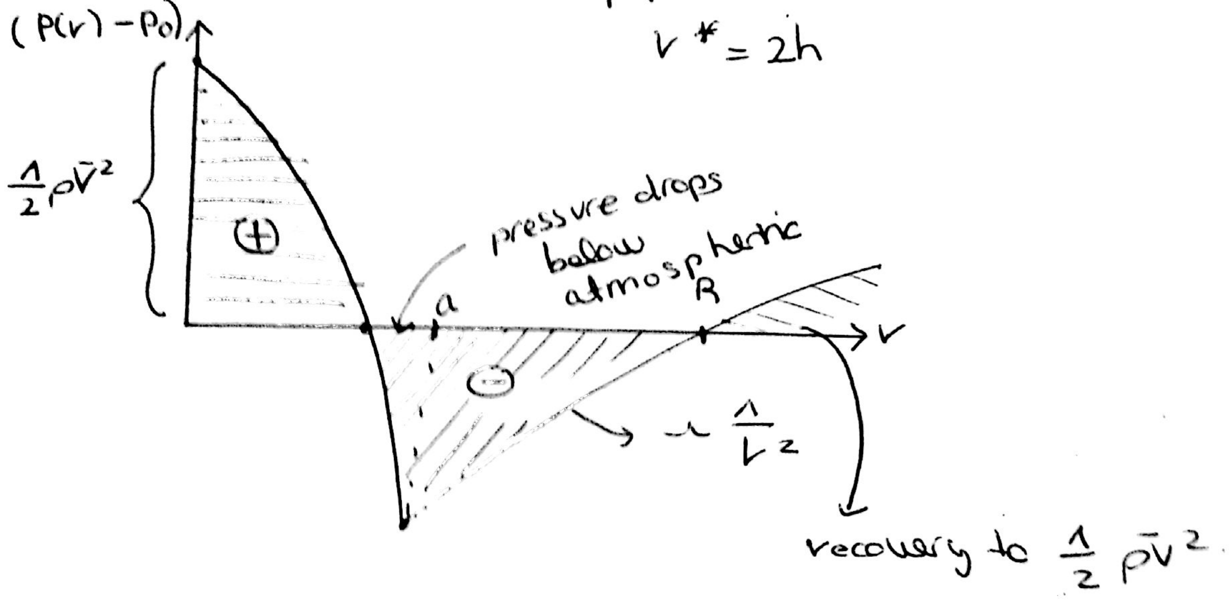
$$p(r) - p_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho V^2\left[1 - r^2/4h^2\right] & r \leq a \\ \frac{1}{2}\rho V^2\left[1 - a^4/4h^2r^2\right] & r \geq a \end{cases}$$

con gráficos:



$p(r^*) = 0$

$r^* = 2h$

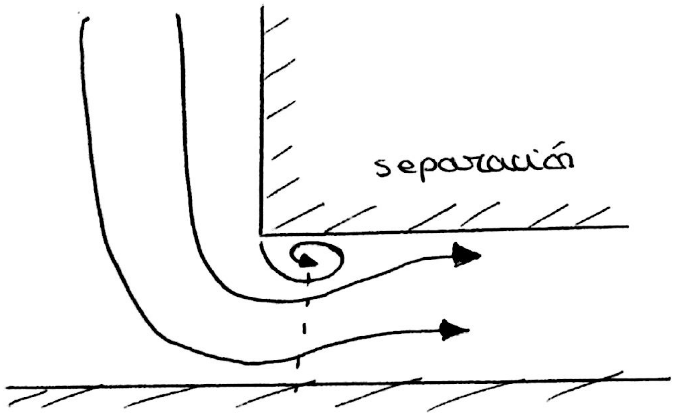


Se puede ver que este análisis es sólo válido para $h \leq a/2$, sino (en caso contrario) el campo de velocidades propuesto y el de presión no tienen sentido.

En la región $r > a$ esperamos que $V_r \downarrow$ y que $r \uparrow$, entonces $p(r) \uparrow$ y $r(\uparrow)$ y lleva a $p_\infty = p_0$ cuando $r \to \infty$.

En la región interior la presión de estancamiento $p_{stag} = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2 (\rho g z \ll 1)$ es la presión mas grande, entonces la velocidad decrece y la presión también.

Pero para $h \geq a/2$ no podemos considerar la conciliación de estos 2 vorticisos en el análisis erroneo hay una pequeña separación de la corriente en la esquina, dando como resultado la formación de vórtices.



c) Total downward pressure force acting on the disk

La presión decrece cuadráticamente con r en la región interior y el calibrador de p en $r = a$ se convierte en negativo si:

$1 - a^2/4h^2 < 0$ o $h \leq \frac{1}{2} a$

$$F_p = \int_0^R p(r)\, 2\pi r\, dr = \int_0^a \pi\rho V^2 \left[r - r^3/4h^2\right] dr + \int_a^R \pi\rho V^2 \left[r - \frac{a^4}{4h^2 r}\right] dr$$

$$= \pi\rho V^2 \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{r^4}{16h^2}\right]_0^a + \pi\rho V^2 \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{a^4}{4h^2} \ln r\right]_a^R$$

$$= \pi\rho V^2 \left[\frac{1}{2} R^2 - \frac{a^4}{16h^2}\right] + \pi\rho V^2 \left(\frac{a^4}{4h^2}\right) \ln(a/R)$$

$$F_p = \frac{1}{2}\pi\rho V^2 \left[R^2 - \frac{a^4}{8h^2}\right] + \pi\rho V^2 \left(\frac{a^4}{4h^2}\right) \ln(a/R)$$

si $a \not< R$ < 1 el tercer término es (-). El primer termino es siempre positivo. Y también dependiendo de los términos 1 y 2 se puede cambiar el signo cuando $\frac{a^4}{8h^2} \geq R^2$ i.e. $h \leq \sqrt{\frac{a^4}{8R^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}R}$

Para las condiciones de nuestro problema $h = 0'1$ cm $a = 1$ cm $R=5$

$r = 2h = 0'2$ cm que es menor que a, por tanto la presión es (-) en la región interna

$F_p + W = 0$

$\rho_{air} = 1'2 kg/m^3 = 1'2 \cdot 10^{-3} g/cm^3$

$$\frac{1}{2}\pi (1'2 \times 10^{-3}) V^2 \left[5^2 - \frac{1^4}{8 \times 0'01}\right] + \pi (1'2 \times 10^{-3}) \left(\frac{1^4 V^2}{4 \times 0'01}\right) \cdot$$

$$\cdot \ln(1/5) = -10$$

$0'0236 V^2 - 0'1517 V^2 = -10$ por tanto $V = 8'84 m/s$

d)

$$\int_p^R \rho \frac{\partial v_r(r,t)}{\partial t} ds + \left[p(R) + \frac{1}{2}\rho V_R^2\right] - \left[p_{stag} + 0 + 0\right] = 0$$

$$\frac{dM_{sys}}{dt} = 0 = \frac{dM_{cv}}{dt} + \int_A \rho (v - v_c) \cdot n \, dA$$

$$0 = \frac{d}{dt}(\pi r^2 h) - \pi r^2 V + 2\pi r h V_r \quad \text{para } r \leq a$$

$$0 = \frac{d}{dt}(\pi r^2 h) - \pi a^2 V + 2\pi r h V_r \quad \text{para } r \geq a$$

$$V_r(r,t) = \begin{cases} \dfrac{Vr}{2h(t)} - \dfrac{r}{2h(t)}\dfrac{dh}{dt} & r \leq a \\ \dfrac{a^2 V}{2rh(t)} - \dfrac{r}{2h(t)}\dfrac{dh}{dt} & r \geq a \end{cases}$$

como $\frac{dh}{dt} < 0$ → la velocidad crece y si $h = 0$ las expresiones se reducen a las del apartado b.

$$\int_0^a \frac{\rho}{2}\left[V\left(-\frac{h}{h^2}\right) + \left(\frac{h^2}{h^2} - \frac{h}{h}\right)\right] r\,dr + \int_a^R \frac{\rho}{2}\left[\frac{a^2 V}{r}\left(-\frac{h}{h^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{h^2}{h^2} - \frac{h}{h}\right) r\right] dr + \left[p_0 + \frac{1}{2}\rho V_R^2\right] - P_R = 0$$

asumiendo que $P_R = P_{stag} = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2$

$V_R = a^2 V / 2Rh(t) - Rh/2h(t)$

tenemos:

$$\frac{R^2}{2}\left(\frac{h^2}{h^2} - \frac{h}{h}\right) - a^2 V\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{R}{a}\right)\frac{h}{h^2} + \frac{1}{4}\left[\frac{a^2 V}{Rh} - \frac{R}{h}h\right]^2 - V^2 =$$

$= 0$

por lo que la separación disminuye con t de forma no lineal.

El problema (o ecuación) se puede resolver como un problema de valor inicial con las condiciones

$$h(t=0) = h_0$$

$$h(t=0) = 0$$

EJERCICIO 2

ALBA NAVARRO
47984466-A

② b)

$$\psi = Ur\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta = Uy\left(1-\frac{a^2}{x^2+y^2}\right)$$

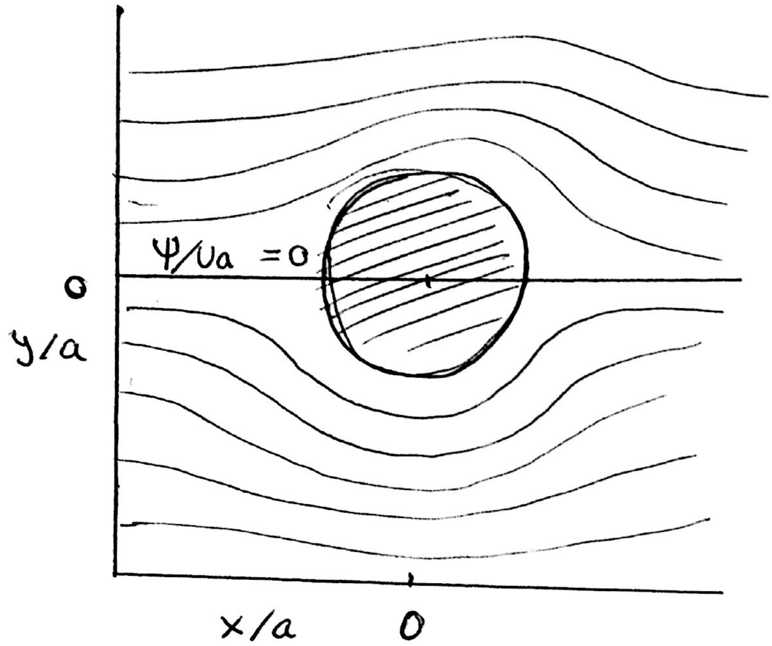
a = radio del cilindro = **R**

para $r \geq a$

c) Velocity

$$V_r = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \qquad V_\theta = -U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta$$

$$u = U - Ua^2\left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \qquad v = -Ua^2\left[\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right]$$



$a = R$

a)
Las líneas de corriente son simétricas alrededor de $x=0$ e $y=0$ como muestra la figura. El flujo dentro de la línea de corriente circular cerrada ($\psi=0$, $r=a$) puede sustituirse por un cilindro circular sólido de radio a. No existen puntos de estancamiento ($u=v=0$) en $x=\pm a$, $y=0$, los extremos anteriores y posteriores del cilindro.

d) La presión en el flujo usando Bernoulli:

$$p^* + \frac{\rho}{2}(V_r^2+V_\theta^2) = p^*_\infty + \frac{\rho}{2}U^2$$

$$p^* = p^*_\infty + \frac{\rho}{2}(U^2 - V_r^2 - V_\theta^2) =$$

$$= p^*_\infty + \frac{\rho}{2}U^2\left[1-\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^2\cos^2\theta - \left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta\right] =$$

$$= p^*_\infty - \frac{\rho}{2}U^2\left(\frac{R^2}{r^2}\right)\left[\left(\frac{R^2}{r^2}\right) - 2\cos\theta\right]$$

e) Presión = $\frac{\text{Fuerza}}{\text{Area}}$

$F = P \cdot A$

Force cylinder Rev. surface:

$$f = \gamma \int_0^{+\pi} a\,(-p\cos\theta)\,d\theta = \underbrace{\cancel{\pi}}_{\pi} a^2 \rho\, dv/dt$$

$\underbrace{\pi \cdot R^2}_{\text{Area}} \cdot \rho$

$d = m/v$

$\underbrace{m}_{\text{mass}} =$ density $\cdot$ volum

Scanned by CamScanner