FINITE DIFFERENCES EXERCISES: EMILIO SÁNCHEZ.

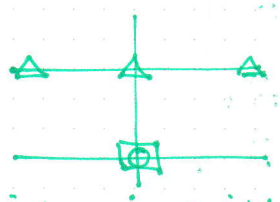
PROBLEMA 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \;;\; x \in (0,1) \;;\; t \geq 0 \;;\; a > 0$$

Initial Condition : $u(x,0) = \sin(2\pi x)$

Periodic B.C. : $u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t \geq 0$

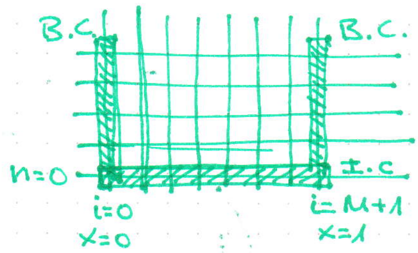
a)



Δ : Unknown

$\square$: Known

$\circ$: Equation



$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_i^{n+1} = \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \\[2ex] \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_i^{n+1} = \dfrac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -a\dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a\,\dfrac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \end{array}$$

Se escoge aproximar la derivada respecto del espacio mediante "Central Difference" puesto que proporciona una aproximación más cercana a la solución exacta. El error es de segundo orden, mientras que en otro caso sería de primer orden. Dicho de otro modo, la recta tangente a la curva (derivada) se aproxima con mayor exactitud mediante la secante.

El esquema resultante sería:

$$-\frac{c}{2}u_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1} + \frac{c}{2}u_{i+1}^{n+1} = u_i^n \;;\; i = 1,\dots,M \;;\; n \geq 0$$

Siendo : $c = a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$; B.C. : $u(0,t) = u(1,t)$; $\forall t \geq 0$

I.C. : $u(x,0) = \sin(2\pi x)$; $\forall x \in (0,1)$

$u_i^0 = u(x,0)$; $\forall i = 0,\dots,M+1$

b) Las condiciones de contorno periódicas se suponen constantes para todo $n \geq 0$ (por definición de las mismas). Por lo tanto:

$$u_0^n = u_{M+1}^n = 0 \;;\; \forall n \geq 0$$

Sistema de ecuaciones lineales resultante:

Para $i = 1 \longrightarrow -\frac{c}{2}\underbrace{u_0^{n+1}}_{0} + u_1^{n+1} + \frac{c}{2}u_2^{n+1} = u_1^n$

$$i=2 \rightarrow -\frac{c}{2}u_1^{n+1} + u_2^{n+1} + \frac{c}{2}u_3^{n+1} = u_2^n$$

$$i=M \rightarrow -\frac{c}{2}u_{M-1}^{n+1} + u_M^{n+1} + \cancel{\frac{c}{2}u_{M+1}^{n+1}}^{0} = u_M^n$$

c) Escribiendo el sistema de ecuaciones de forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & c/2 & & & & \\ -c/2 & 1 & c/2 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & -c/2 & 1 & c/2 \\ & & & & -c/2 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n+1} \\ u_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{n} \\ u_2^{n} \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n} \\ u_M^{n} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{n}}$$

Método iterativo: Jacobi method

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^{M} a_{ij}x_j^k\right]$$

$$\boxed{(u_i^{n+1})^{k+1} = u_i^n + \frac{c}{2}(u_{i-1}^{n+1})^k - \frac{c}{2}(u_{i+1}^{n+1})^k}$$

Método directo. Matriz $\underline{\underline{A}}$ tridiagonal. Transformamos el sistema en upper triangular y después se resuelve hacia atrás:
Sea $\underline{\underline{B}}$ matriz upper triangular.

$b_{ii} = a_{ii}$;

$b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = a_{12}$;

$$b_{i,i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii} - b_{i-1,i}\,a_{i,i-1}} \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, M-1$$

Matriz de términos independientes:

$$u_1^{n\prime} = \frac{u_1^n}{a_{11}} = u_1^n \quad ; \quad u_i^{n\prime} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^{n\prime}\cdot a_{i,i-1}}{\cancel{a_{ii}}^{1} - b_{i-1,i}\cdot a_{i,i-1}} \quad ; \quad i = 2, 3, \dots M$$

Siendo la solución:

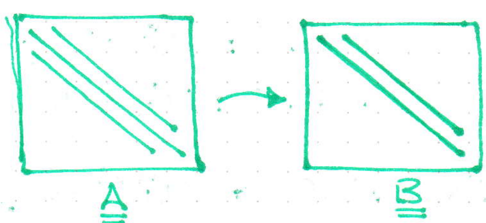
$$\boxed{u_M^{n+1} = u_M^{n\prime} \quad ; \quad u_i^{n+1} = u_i^{n\prime} - b_{i,i+1}\cdot u_{i+1}^{n+1}}$$

d) Fill-in for the direct method.

Supongamos $n = 0, \dots, L$;

$i = 1, \dots, M$;

Definimos $\underline{\underline{A}} \wedge \underline{\underline{B}}$;




```
for n = 0 : L
    if n > 0
        for i = 2 : M
            uindp(1) = u(n,1);
            uindp(i) = (u(n,i) - uindp(i-1)·a(i,i-1)) / (a(i,i) - b(i-1,i)·a(i,i-1));
        end
    u(n+1,M) = uindp(M);
    for i = M-1 : 1
        u(n+1,i) = uindp(i) - b(i,i+1)·u(n+1,i+1);
    end
end
```

EJERCICIO 4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma u \quad ; \quad x \in (0,1) \; ; \; t \geq 0$$

B.C.: $u(0,t) = 0$; $\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$

I.C.: $u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0'25 \\ 4x-1 & 0'25 \leq x < 0'5 \\ -4x+3 & 0'5 \leq x < 0'75 \\ 0 & x \geq 0'75 \end{cases}$

a) $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$; $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}$;

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \sigma u_i^n \; ; \; \text{def. } c = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$u_i^{n+1} = (\Delta t \sigma + 1 - 2c) u_i^n + c\,(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) \; ; \; i = 0, \dots, M+1, \; n > 0$$

+ I.C

+ B.C.: $u_0^n = u(0,t) = 0$; $n > 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \Longrightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i=M+1}^n = 0 = \frac{u_{M+2}^n - u_M^n}{2\Delta x}$$

$u_{M+2}^n = u_M^n$ (Punto fantasma).

Para $\sigma = 0 \rightarrow u_i^{n+1} = c u_{i-1}^n + (1-2c) u_i^n + c u_{i+1}^n$; $i = 1, \dots M+1$

$+$ B.C: $u_0^n = 0$; $u_{M+2}^n = u_M^n$; $n > 0$

$+$ I.C: $u_i^0 = u(x,0)$

Para $\nu = 0 \rightarrow u_i^{n+1} = (1 + \Delta t \sigma) u_i^n$; $i = 1, \dots, M+1$, $n \geq 0$

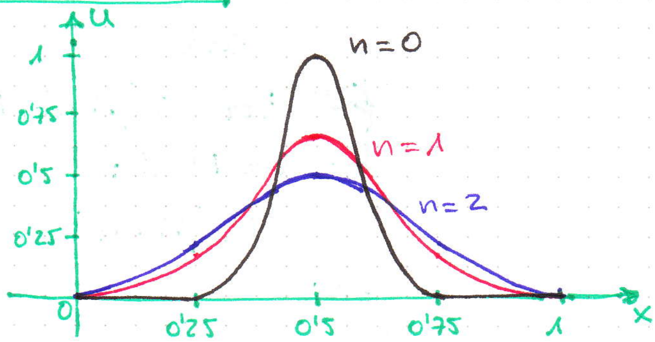
$+$ B.C.: $u_0^n = 0$; $n > 0$

$+$ I.C.: $u_i^0 = u(x,0)$

c) $\nu = 0'1$; $\Delta x = 0'25$; $\Delta t = 0'1 \Longrightarrow c = \nu \frac{\Delta t}{0'25} = \frac{0'1^2}{0'25^2} = 0'16$

$$\boxed{u_i^{n+1} = 0'16 u_{i-1}^n + 0'67 u_i^n + 0'16 u_{i+1}^n} ;$$

n \ i	0	1	2	3	M+1
	0	0'25	0'5	0'75	1
0	0	0	1	0	0
1	0	0'16	0'67	0'16	0
2	0	0'2144	0'5001	0'2144	0'0512



Los resultados obtenidos son coherentes con lo esperado, cada paso de tiempo la curva se suaviza y decrece como motivo de la difusión. Para el segundo paso, aparece una ligera desviación respecto al valor esperado en $i = M+1$, esto puede deberse al error de aproximación de la derivada en ese punto, puesto que el valor debería ser 0.

d) Método implícito: $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_i^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_i^{n+1} = \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \sigma u_i^{n+1} \; ; \; c = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \; ;$$

Resultando: $-c u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2c - \Delta t \sigma) u_i^{n+1} - c u_{i+1}^{n+1} = u_i^n$; $i = 1, \dots, M+1$; $n \geq 0$

$+$ B.C.: $u_0^n = 0$; $\forall n > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{i=M+1}^{n+1} = \frac{u_{M+2}^{n+1} - u_M^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \Longrightarrow u_{M+2}^{n+1} = u_M^{n+1} \; ; \forall n \geq 0$$

$+$ I.C.: $u_i^0 = u(x;0)$

La última ec. quedaría: $-c u_M^{n+1} + (1 + 2c - \Delta t \sigma) u_{M+1}^{n+1} - c u_M^{n+1} = u_{M+1}^n$

$$-2c u_M^{n+1} + (1 + 2c - \Delta t \sigma) u_{M+1}^{n+1} = u_{M+1}^n$$

Escribiendo el sistema de ecuaciones lineales de forma matricial:

$$
\begin{bmatrix}
(1+2c-\Delta t\sigma) & -c & & & 0 \\
-c & (1+2c-\Delta t\sigma) & -c & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & & -c & (1+2c-\Delta t\sigma) & -c \\
 & & & -2c & (1+2c-\Delta t\sigma)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_M^{n+1} \\ u_{M+1}^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
u_1^{n} \\ u_2^{n} \\ \vdots \\ u_M^{n} \\ u_{M+1}^{n}
\end{bmatrix}
$$

Matriz tridiagonal. La solución propuesta es la misma que se describe en el apartado d) del ejercicio anterior. Este método consiste en transformar la matriz en una de tipo triangular superior, obteniendo a continuación los valores hacia atrás desde el final.