

# INGENIERÍA DE ESTRUCTURAS

TRABAJO DE CURSO S-17

Fernando Sattler Cantons

38873917 – F

Master en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

09/06/2015

## ÍNDICE

1. Introducción .....	2
2. Análisis bidimensional (2D) .....	3
2.1. Aspectos teóricos del tipo de problema .....	3
2.2. Pre-proceso .....	5
2.2.1. Generación de la malla.....	7
2.3. Cálculo y resultados .....	8
2.3.1. Caso 1: Peso propio .....	8
2.3.2. Caso 2: Peso propio + empuje hidrostático.....	10
3. Análisis tridimensional (3D) .....	15
3.1. Aspectos teóricos del tipo de problema .....	15
3.2. Pre-proceso .....	17
3.2.1. Generación de la malla.....	19
3.3. Cálculo y resultados .....	20
3.3.1. Caso 1: Peso propio .....	20
3.3.2. Caso 2: Peso propio + Empuje hidrostático.....	24
4. Conclusiones.....	29

# 1. Introducción

En este trabajo se analiza el comportamiento estructural de una presa de hormigón de 80 metros de altura y 4 metros de ancho de coronación apoyada sobre un terreno de 30 metros de potencia. En la Figura 1 y 2 se muestra la geometría del problema y los parámetros de diseño de la presa respectivamente.

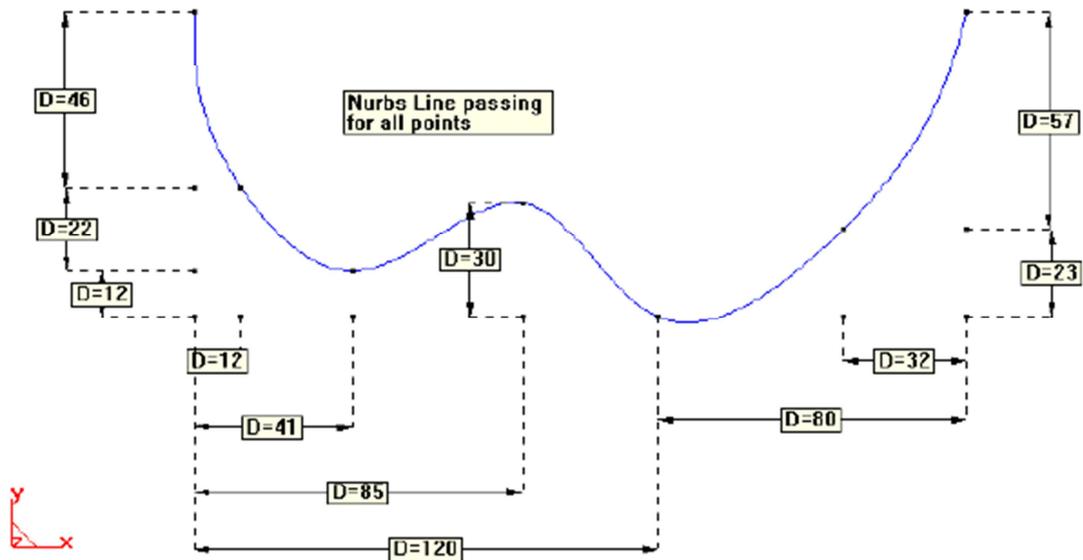


Figura 1: Geometría del problema

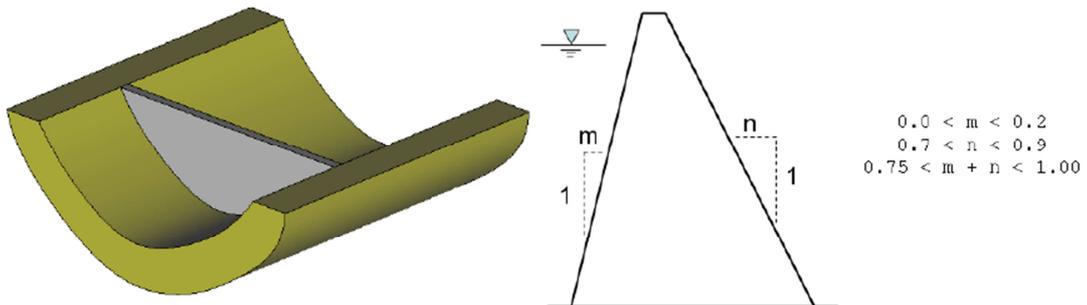


Figura 2: Limitaciones geométricas de la presa

Las características de los materiales se muestran, a continuación, en la Tabla 1.

Material	Módulo de elasticidad (E)	Coefficiente de Poisson (u)	Peso específico
Hormigón	$2.2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	0.20	$25 \text{ kN/m}^3$
Terreno	$3.7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	0.30	$20 \text{ kN/m}^3$

Tabla 1: Características de los materiales

Por otro lado, en el problema se exige que se cumpla una restricción de tensiones. Concretamente no debe superarse una tracción de 1 MPa en ningún punto de la presa.

Con el fin de realizar el análisis estructuras se simulará con dos situaciones de carga diferentes. En primer lugar tan solo se tendrá en cuenta el peso propio de los materiales, mientras que en el segundo caso se tendrá en cuenta el peso propio y el empuje hidrostático tanto en la presa como en el terreno aguas arriba.

Además se realizarán estas simulaciones tanto para un caso 2D como en un caso 3D.

Una vez definidos los parámetros del problema es posible proceder a su modelización y simulación. Esto se llevará a cabo utilizando el Software GiD 12.0.4 con el programa RamSeriesEducational.

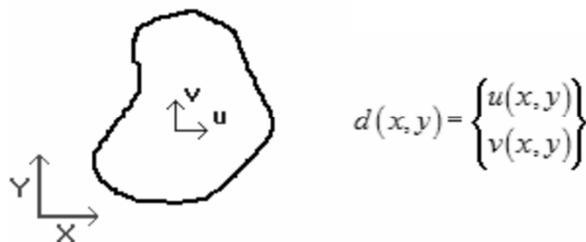
## 2. Análisis bidimensional (2D)

### 2.1. Aspectos teóricos del tipo de problema

En el caso que nos ocupa, al tratarse de una presa de sección constante, se observa que una de sus dimensiones (largo) es mucho mayor que las otras dos. Este hecho permite considerar tan solo una sección del problema, la cual será representativa de todo el dominio. A este tipo de problemas se les conoce como problemas de deformación plana.

Los problemas de deformación plana se caracterizan por tener  $\varepsilon_z = 0$ .

El campo de desplazamientos es de naturaleza vectorial y queda perfectamente establecido si en cada punto se conocen los desplazamientos según las direcciones de los ejes coordenados. El vector desplazamiento en un punto cualquiera se define como:



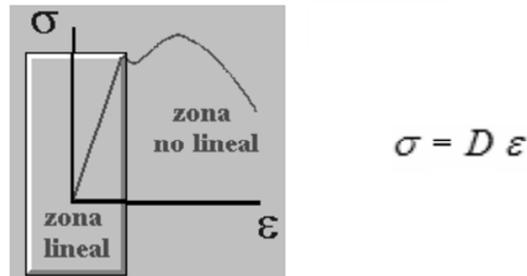
El campo de deformaciones se deduce a partir de las primeras derivadas del campo de desplazamientos al aceptar la teoría de pequeñas deformaciones. A partir de la teoría general de la elasticidad se obtiene:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

La deformación longitudinal  $\varepsilon_z$  es nula en el caso de deformación plana, como se ha comentado antes. Por consiguiente, los términos en la tercera dimensión no intervienen de ninguna manera en la resolución del problema. Sin embargo, si se desea se pueden calcular a posteriori.

La relación entre las tensiones y las deformaciones se deduce de la elasticidad tridimensional con las hipótesis simplificativas para deformación plana. Las hipótesis de elasticidad lineal definen un comportamiento proporcional entre tensiones y deformaciones según la relación siguiente.



Se define  $D$  como la matriz de constantes elásticas, cuya expresión depende de la hipótesis de trabajo. La matriz constitutiva en el caso de elasticidad bidimensional con hipótesis de deformación plana es:

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad d_{12} = d_{21} = \frac{\nu}{1-\nu} d_{11} \quad d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

Una vez establecidos todos estos parámetros debe definirse una ecuación general de equilibrio. De las relaciones entre desplazamientos, tensiones y deformaciones, el problema matemático se formula como un equilibrio entre el trabajo efectuado por las fuerzas internas que se generan por la deformación elástica del cuerpo y las fuerzas externas que lo solicitan. La expresión de equilibrio global más universal en problemas de mecánica estructural es el Principio de los Trabajos Virtuales que da lugar a la forma integral siguiente.

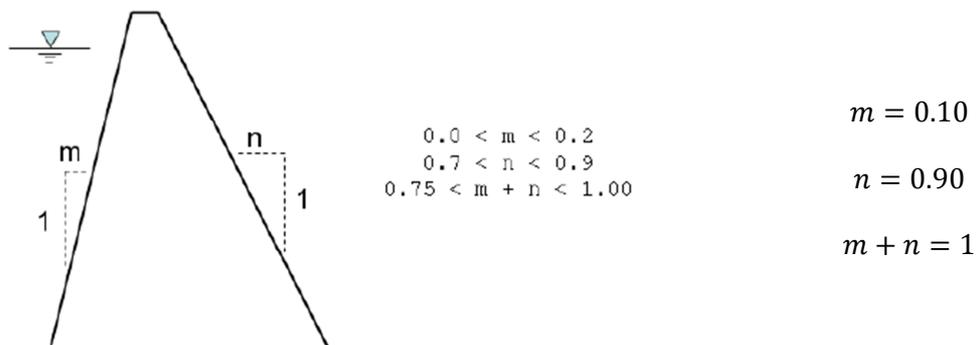
$$\iint_A \delta \varepsilon \sigma dA = \iint_A \delta u b dA + \int_l \delta u t ds + \sum_i \delta u_i q_i$$

La resolución analítica de esta ecuación es imposible en la mayor parte de los casos, por ello es necesario efectuar una aproximación discreta del problema. Los elementos finitos permiten reducir esta expresión a una más manejable e igualmente veraz.

## 2.2. Pre-proceso

Una vez determinado el tipo de problema que se va a resolver, se debe proceder al modelado de la estructura del terreno en el que se apoya.

En primer lugar se deben decidir las pendientes de la presa atendiendo a las limitaciones impuestas. En este caso, después de haber realizado diversas pruebas se ha llegado a la conclusión de que los valores de  $m$  y  $n$  que mejor se ajustan a los requisitos del problema son:



Así pues, con las pendientes definidas se ha procedido al modelado del problema y se ha obtenido lo siguiente.

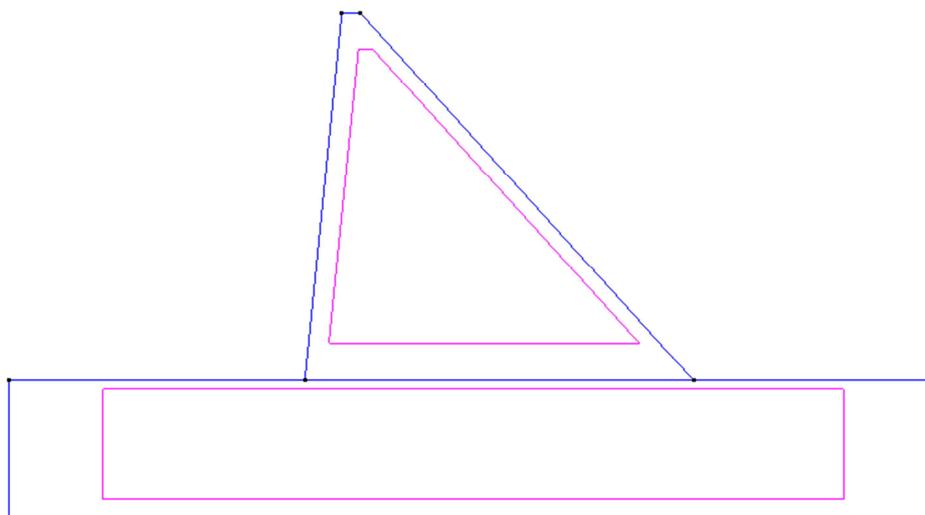


Figura 3: Modelo generado

En el modelo se han diferenciado claramente las superficies de la presa y del terreno, ya que como se ha podido comprobar en la tabla 1, tienen características diferentes.

Una vez definido el modelo y su geometría se deben establecer las condiciones de contorno del problema. En este caso, en los contornos laterales se ha restringido el movimiento horizontal (eje X), mientras que en el contorno inferior se ha restringido el movimiento vertical (eje Y). De este modo el modelo queda correctamente apoyado y se garantiza que los resultados obtenidos son debidos a la física del problema y no a la influencia de los contornos.

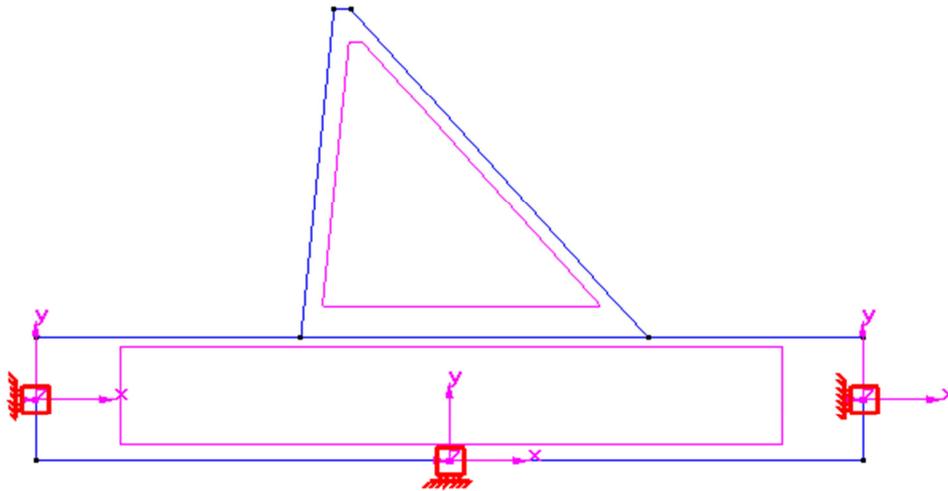


Figura 4: Condiciones de contorno

Seguidamente se han definido los materiales correspondientes a cada superficie y se ha indicado que se tenga en cuenta el peso propio del conjunto.

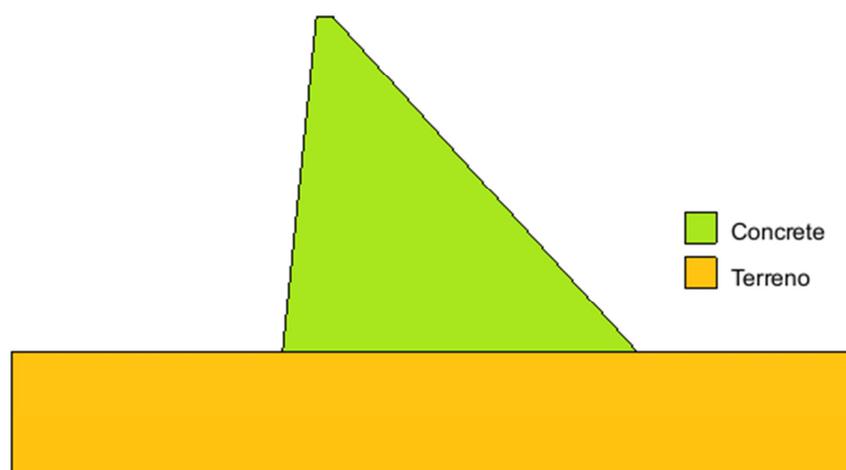


Figura 5: Disposición de los materiales

Dado que también se pide analizar el caso en el que el empuje hidrostático actúa junto al peso propio, debe calcularse dicho empuje.

Para ello se ha aplicado la fórmula:  $E = \rho \cdot g \cdot h$ , siendo el valor de h la altura de agua en la presa, que en el caso que nos ocupa es de 77 metros. Así pues, el empuje resultante es

$$E = 1000 \cdot 9.8 \cdot 77 = 754600 \text{ N/m}^2$$

Una vez definidos todos los parámetros de cálculo se puede proceder al mallado del modelo.

### 2.2.1. Generación de la malla

Dada la geometría del modelo y la magnitud de éste, se ha optado por generar mallas con tamaños diferentes para el cuerpo de la presa y para el terreno. Considerando las dimensiones del terreno se ha considerado adecuada una malla de tamaño 2. En el caso de la presa se ha optado por una malla un poco más fina, con tamaño 1.50.

Se ha optado por un mallado no estructurado debido a que la geometría de la presa impedía el uso de una malla estructurada.

Los elementos que conforman la malla son elementos cuadriláteros de 4 nodos. Se ha escogido este tipo de elemento debido a la geometría de las superficies y por ser elementos que proporcionan mayor precisión que los elementos triangulares. A esto se le une su bajo coste computacional. A continuación se presenta un ejemplo de la malla generada.

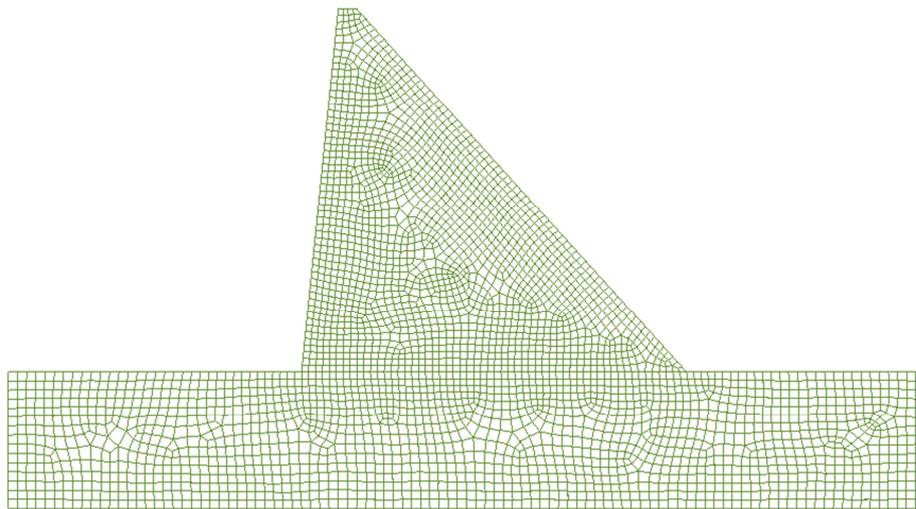


Figura 6: Malla de elementos cuadriláteros

Una vez generada la malla se ha procedido al cálculo del modelo con las dos situaciones de carga.

## 2.3. Cálculo y resultados

### 2.3.1. Caso 1: Peso propio

En el primer caso de estudio tan sólo se ha tenido el peso propio de los materiales por lo que es de esperar que las tensiones generadas en la presa no superen el límite de 1 MPa establecido.

Dado que la restricción se impone sobre las tracciones, la tensión con la que se comparará dicho límite será la tensión principal  $S_1$ . La tensión principal  $S_1$  es aquella que presenta los valores máximos de la tracción y los valores mínimos de la compresión. Por el contrario, la tensión principal  $S_3$  es la que presenta los valores máximos de compresión y los mínimos de tracción, por lo que en el caso que nos ocupa no es de especial relevancia.

Así pues, centrando la atención en las tensiones  $S_1$ , se han obtenido los resultados siguientes.

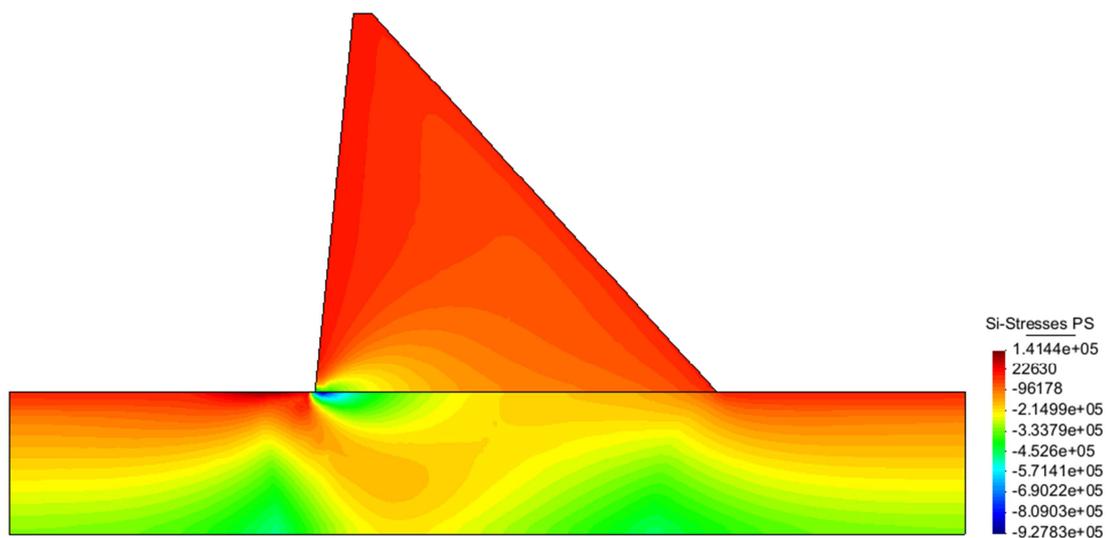


Figura 7: Mapa de tensiones principales  $S_1$

Como se puede ver, la tensión máxima de tracción (signo positivo) registrada en todo el dominio del problema es de 0.144 MPa, por lo que en vacío la presa está muy lejos del límite establecido.

Es más, si centramos la atención en el punto donde se da el máximo, se observa que éste se da en el terreno y no en la presa, por lo que todavía se está más lejos del límite.

Centrándonos en la presa se puede ver que en su mayoría las tensiones que se producen son de compresión, llegando solo a acoger tracciones en la zona cercana a la coronación.

En la Figura 8 se puede apreciar el detalle de la zona donde se concentran las tracciones de mayor módulo y su correspondiente disposición.

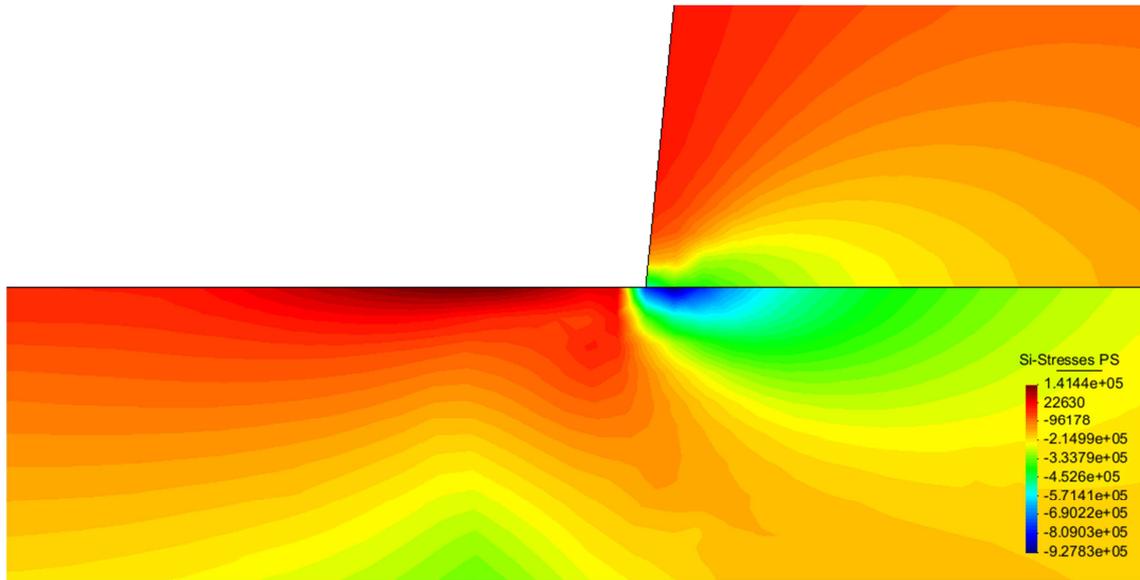


Figura 8: Mapa de tensiones principales  $S_1$  (Detalle del pie de presa)

Se puede apreciar que la tracción se concentra en el terreno, mientras que en el pie de la presa se produce una zona de compresión, fruto de la tendencia de la presa a desplazarse hacia aguas arriba debido a la ausencia del empuje hidrostático.

Con el fin de validar los resultados se ha llevado a cabo un análisis de convergencia para la tracción máxima, aun sabiendo que se produce en el terreno.

A continuación se presenta una tabla en la que se recogen las tracciones medidas en función del tamaño de la malla escogida.

Tamaño malla presa	Tamaño malla terreno	Nº de nodos	Grados de libertad	Tracción máxima (MPa)
4	4.5	1537	3074	0.17728
3.5	4	1656	3312	0.16677
3	3.5	1845	3690	0.15465
2.5	3	2041	4082	0.14373
2	2.5	2402	4804	0.14261
1.5	2	3469	6938	0.14144

Tabla 2: Parámetros del análisis de convergencia

A continuación se presenta la representación gráfica de dichos resultados, en el que se puede apreciar mejor la convergencia de las tracciones máximas.

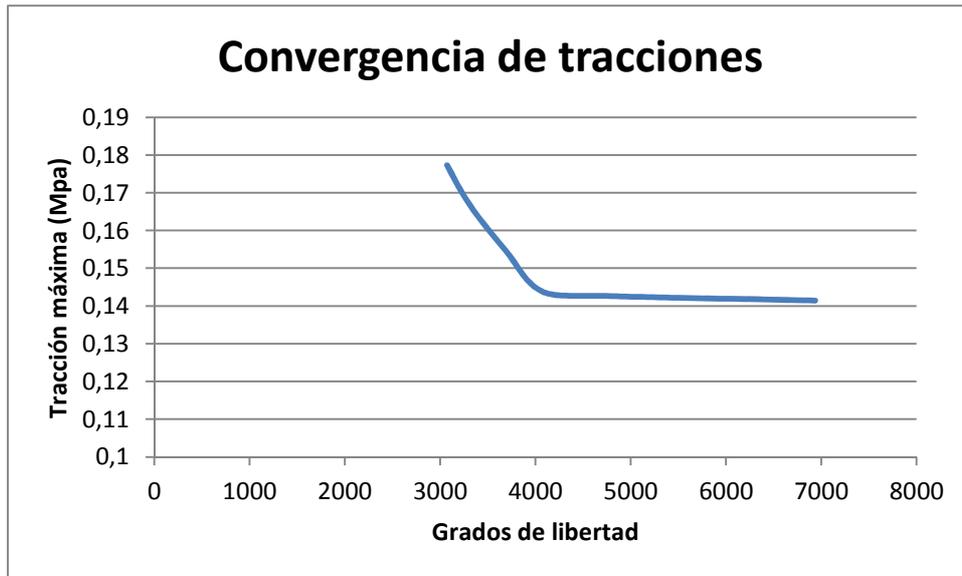


Figura 9: Convergencia de tracciones máximas

Como puede verse, la tracción máxima empieza a converger a partir de los 4000 grados libertad (2000 nodos), tendiendo a situarse en torno a los 0.14 MPa. Observando ésta tendencia se verifica el resultado obtenido anteriormente.

### 2.3.2. Caso 2: Peso propio + empuje hidrostático

En este segunda caso, además del peso propio, se ha tenido en cuenta el empuje hidrostático generado por una columna de agua de 77 metros de altura. Como ya se ha visto antes, el empuje generado por esta columna es de  $E = 754600 \text{ N/m}^2$ .

Con el fin de recrear dicho empuje en el modelo se ha aplicado una carga uniforme de valor "E" sobre el terreno aguas arriba, mientras que sobre el paramento de la presa se ha aplicado una carga lineal triangular de valor "E" en la base y valor nulo a una altura de 77 metros. El esquema de cargas se puede apreciar en la Figura 10.

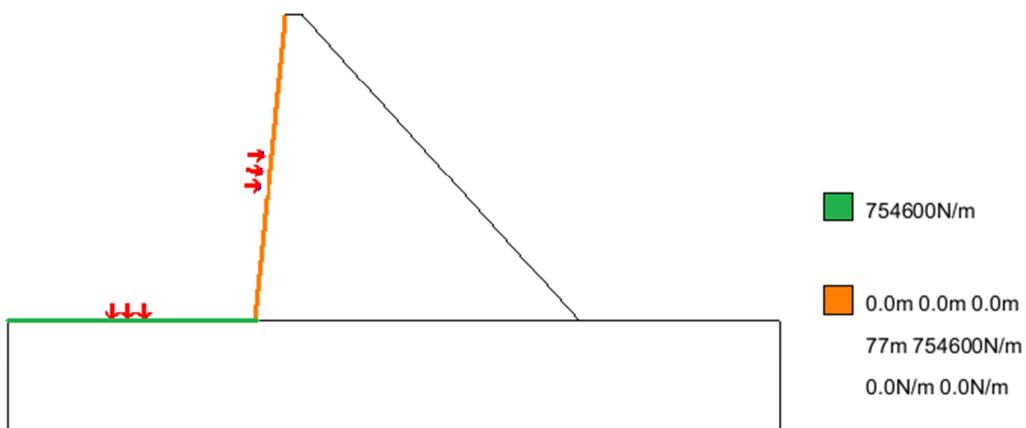


Figura 10: Distribución del empuje hidrostático

Una vez definidas las cargas se ha procedido al mallado, manteniendo las características de éste respecto al caso anterior. Seguidamente se ha llevado a cabo el cálculo.

En este caso, al existir un empuje sobre la presa se puede ver como las tracciones se sitúan aguas arriba, en la zona inferior; las compresiones por el contrario se encuentran en el pie de la presa aguas abajo. Dada la configuración de cargas y la geometría del problema se puede decir que es el comportamiento esperado en este caso.

Observando la imagen siguiente se puede ver como las tracciones máximas, como pasaba con la presa vacía, se dan en el terreno. En la presa las tracciones toman valores menores pero, aun así, suficientemente importantes como para tenerlos en cuenta dado el límite de 1 MPa.

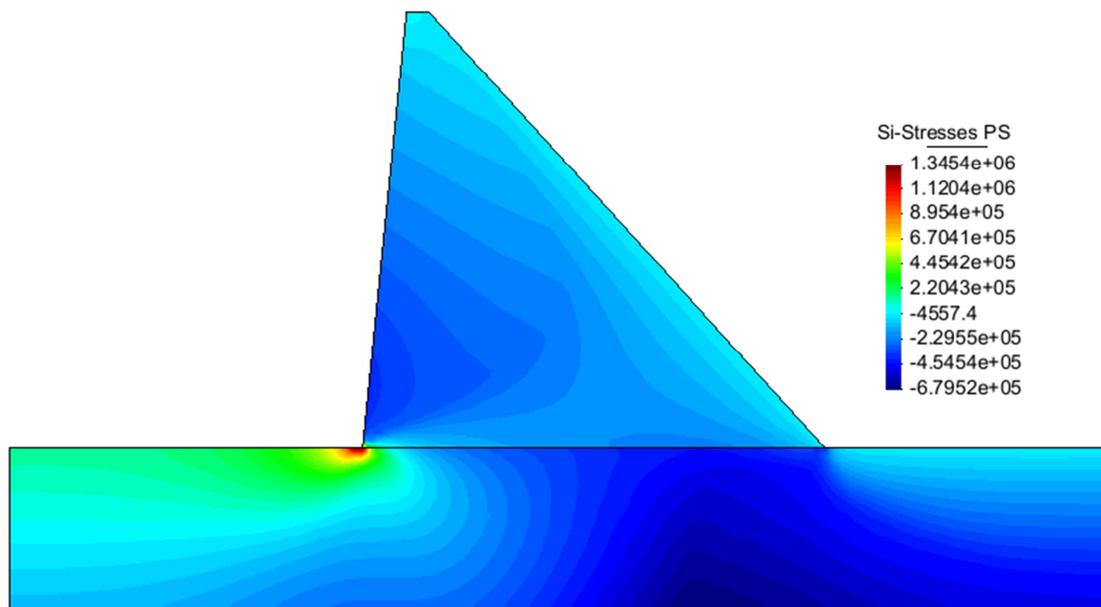


Figura 11: Mapa de tracciones máximas en el caso 2 (tensión principal  $S_1$ )

Viendo el mapa de tracciones se ve como hay una zona del terreno que llega a tomar valores de 1.34 MPa, pero lo realmente importante es el valor máximo que se da en la presa. Para determinar dicho valor se ha etiquetado el valor de la tensión de tracción en el pie de la presa.

Como se puede ver, para un mismo nodo compartido por la presa y por el terreno, se obtienen dos valores diferentes de tensión. La etiqueta superior corresponde a la tracción en la presa, mientras que la inferior representa la tracción en ese mismo punto para el terreno. Así pues, el valor máximo obtenido en dicho punto ha sido de 0.9513 MPa, lo cual cumple con la restricción de tracciones impuesta en el problema.

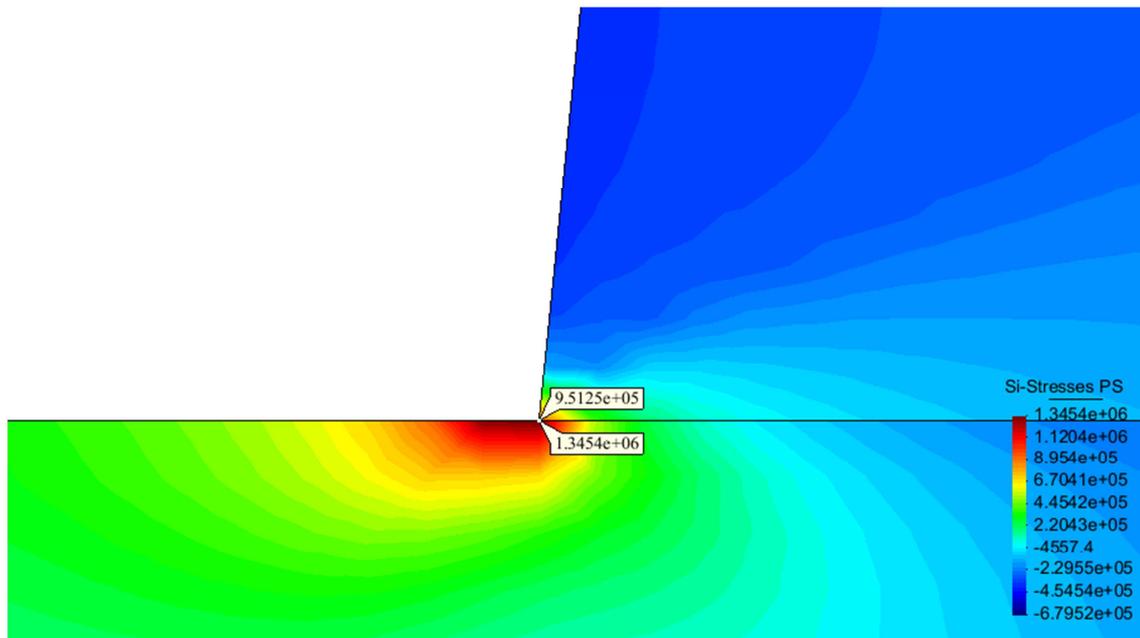


Figura 12: Detalle del pie de presa aguas arriba

Visto esto, se puede decir que el diseño de la presa cumple con los requisitos establecidos por el problema tanto en vacío como sometida al empuje hidrostático.

Antes de proceder con el análisis de convergencia es necesario comentar que en el contacto entre el pie de la presa y el terreno se produce concentración de tensiones y que por ello el problema se ha tenido que tratar con cuidado, en el sentido de discriminar aquellos resultados poco fiables.

Con el fin de observar este fenómeno se han representado las tracciones mediante la elevación de las áreas coloreadas, siendo las de mayor altura las que presentan valores mayores de tracción. A modo de comparación se muestra el resultado entre una malla relativamente grande (tamaño 5 para todo el dominio) y una malla muy refinada (tamaño 0.75 para todo el dominio).

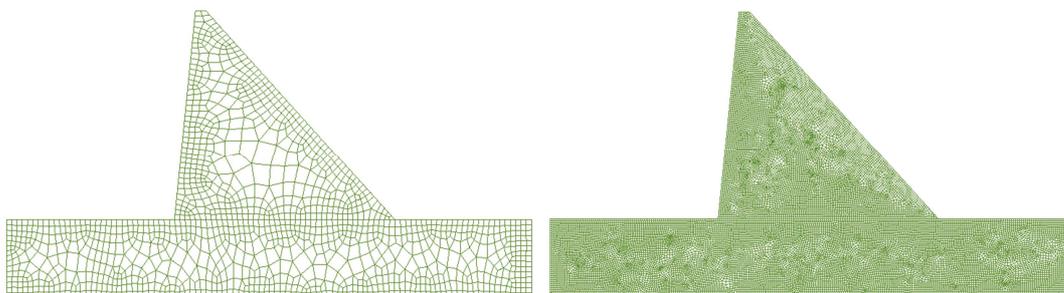


Figura 13: Comparación entre tamaños de malla

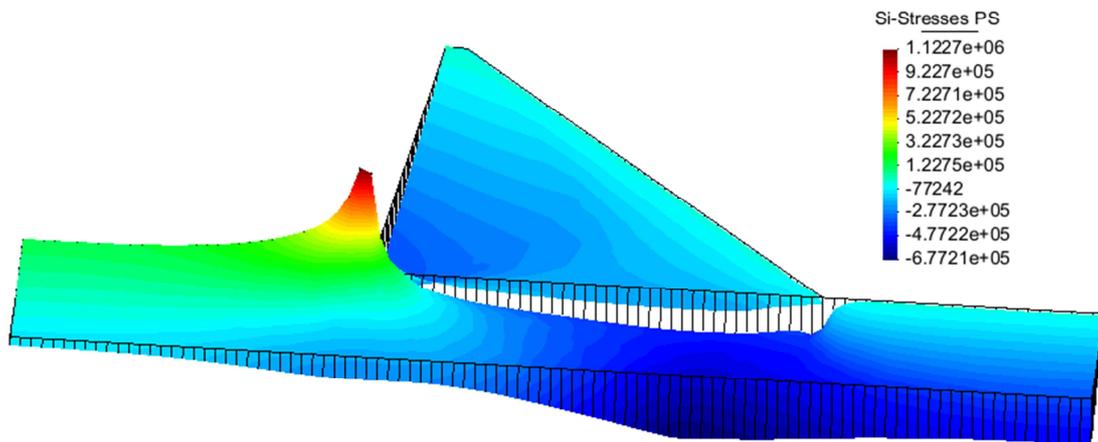


Figura 14: Tracciones máximas con mallado de tamaño 5

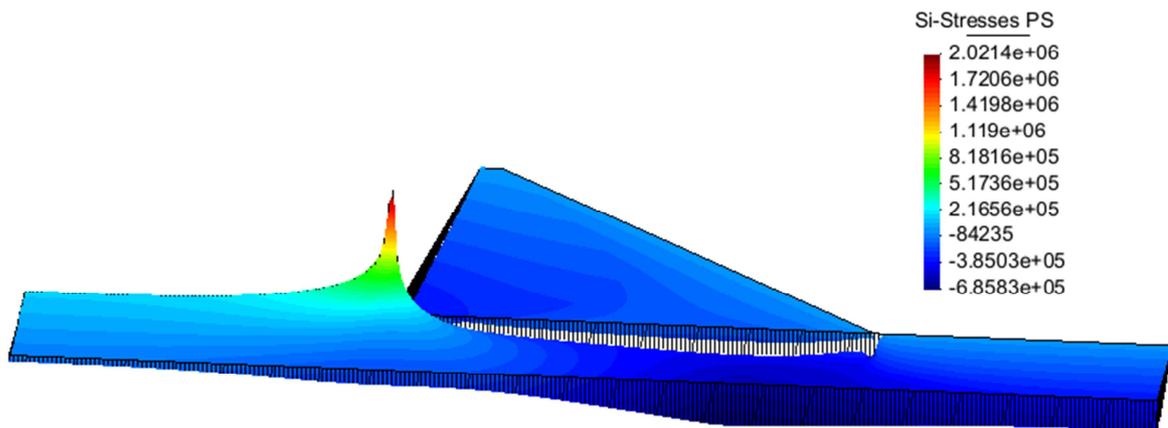


Figura 15: Tracciones máximas con mallado de tamaño 0.75

Como puede verse comparando las figuras 14 y 15, conforme se refina la malla las tensiones se concentran y van aumentando su valor, alejándose del valor real de la tensión.

Para evitar la concentración de tensiones es recomendable redondear las esquinas rectas, pero en el caso que nos ocupa esto no ha sido posible ya que el nodo que genera el conflicto es un nodo compartido por la presa y por el terreno. Además la geometría del problema impide realizar esta actuación. En este caso se ha optado por no realizar mallados muy finos y mantener unos tamaños aceptables (tamaño 2 en el terreno y 1.5 para la presa).

Dicho esto y visto el comportamiento de las tensiones al refinar la malla es de esperar que al realizar el análisis de convergencia, la tracción en el pie de la presa no llegue a estabilizarse del todo y que por tanto mantenga una tendencia ascendente.

En la tabla siguiente se muestran los parámetros utilizados para realizar el análisis y los resultados obtenidos para la tracción en el pie de la presa y el terreno.

Tamaño malla presa	Tamaño malla terreno	Nº de nodos	Grados de libertad	Tracción máxima Presa (MPa)	Tracción máxima Terreno (MPa)
4	4.5	1523	3046	0.74225	1.1289
3.5	4	1644	3288	0.74818	1.1427
3	3.5	1867	3734	0.79123	1.1981
2.5	3	2079	4158	0.82543	1.2284
2	2.5	2410	4820	0.88534	1.2861
1.5	2	3455	6910	0.95125	1.3454

Tabla 3: Parámetros del análisis de convergencia

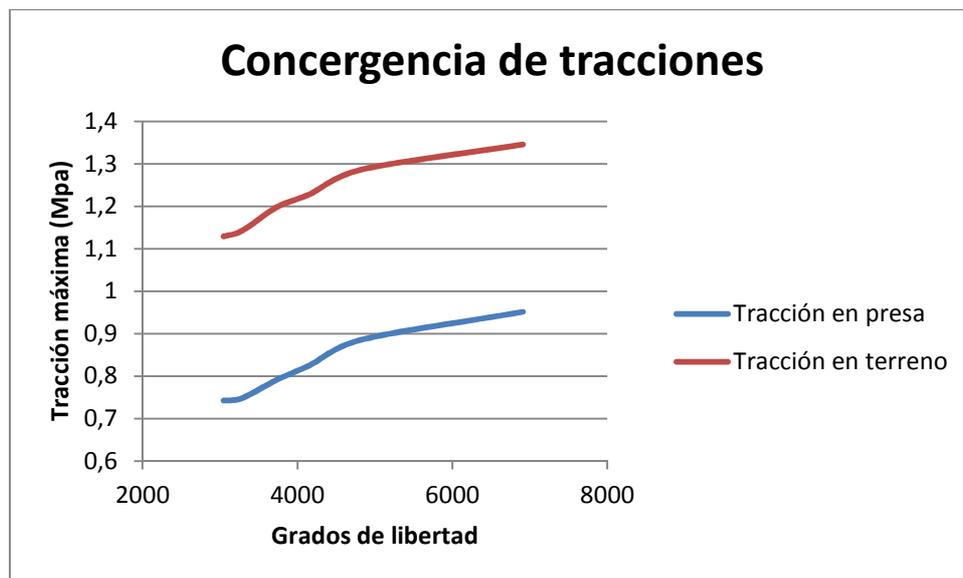


Figura 16: Análisis de convergencia de tracciones máximas

Tal y como se ha comentado, la tendencia es ascendente a causa de la concentración de tensiones. Aun así, para la mayoría de simulaciones realizadas la tracción máxima se mantenía por debajo del límite, por lo que es razonable considerar que se cumple con la limitación impuesta.

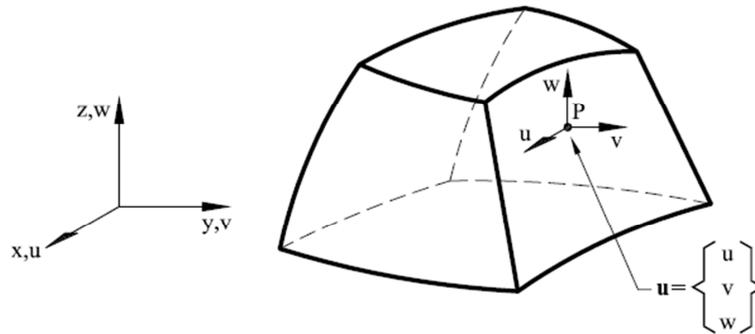
Finalmente, se puede concluir que con los valores de  $m = 0.10$  y  $n = 0.90$  se obtiene una configuración que permite satisfacer la limitación de tracciones impuesta.

Con el fin de verificar el diseño realizado debe llevarse un análisis integral del problema, esto es, modelando el problema en tres dimensiones introduciendo la holografía real del terreno.

## 3. Análisis tridimensional (3D)

### 3.1. Aspectos teóricos del tipo de problema

En un análisis tridimensional no es posible realizar simplificaciones como pasaba en el caso 2D. En este caso se analiza el comportamiento estructural de todo el conjunto teniendo en cuenta sus características.



Sea un sólido tridimensional cualquiera, el movimiento de un punto en el espacio queda perfectamente definido por las tres componentes del vector de desplazamientos

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T$$

Donde  $u$ ,  $v$ ,  $w$  son los desplazamientos del punto según los ejes cartesianos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente.

Siguiendo la teoría clásica de la elasticidad tridimensional, el vector de deformación en un punto está definido por seis componentes

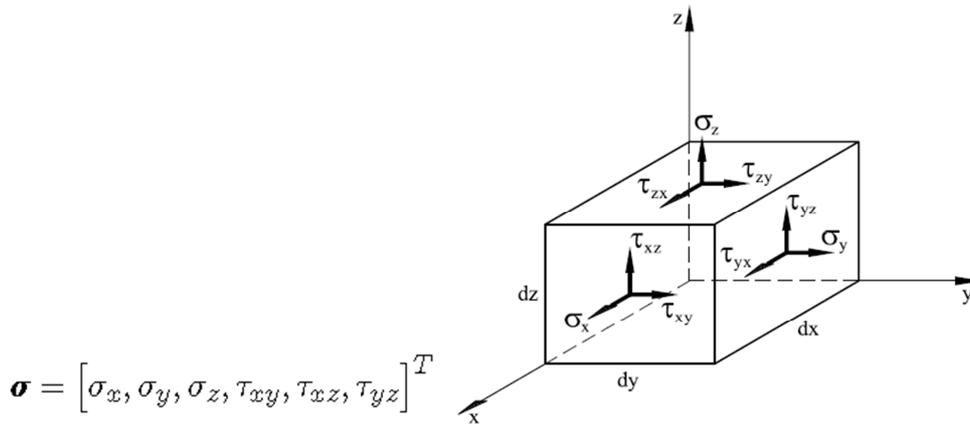
$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T$$

Con

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & ; & \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} & \quad ; & \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & ; & \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \quad ; & \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

Donde  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  son las deformaciones normales y  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  las deformaciones tangenciales.

El vector de tensiones en un punto contiene seis componentes de tensión, conjugadas de las seis respectivas deformaciones.



Donde  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  son las tensiones normales y  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  son las tensiones tangenciales.

La relación entre las seis deformaciones y las seis tensiones viene expresada en el caso más general de elasticidad anisótropa por una matriz constitutiva de tamaño 6x6 simétrica y con 21co eficientes independientes. En el caso de material ortótropo el número de coeficientes se reduce a nueve.

Un caso muy usual en la práctica es el de elasticidad isótropa en que los coeficientes independientes de la ecuación constitutiva se reducen a dos: el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson  $\nu$ . En dicho caso, la ecuación constitutiva puede escribirse (teniendo en cuenta los vectores de deformaciones y tensiones iniciales) como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \boldsymbol{\sigma}^0$$

y la matriz constitutiva D viene dada por

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Simétrica

En el caso de deformaciones iniciales de origen térmico el vector  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  tiene el valor

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \alpha(\Delta T) [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T$$

La ecuación del PTV se escribe de manera análoga al caso de elasticidad bidimensional, teniendo simplemente en cuenta ahora el carácter tridimensional del análisis. Así, se tiene

$$\iiint_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \iiint_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \iint_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dA + \sum_i \delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{q}_i$$

Donde V y A son el volumen y la superficie del cuerpo sobre los que actúan las fuerzas de masa b, de superficie t y puntuales qi, respectivamente.

En la expresión del PTV intervienen solo primeras derivadas de los desplazamientos, lo que exige simplemente continuidad de clase C0 a la aproximación de elementos finitos.

### 3.2. Pre-proceso

Para la realización del modelo en tres dimensiones se ha tomado la misma configuración de pendientes que en el caso 2D:

$$m = 0.10$$

$$n = 0.90$$

$$m + n = 1$$

Así pues, con las pendientes definidas se ha procedido al modelado del problema. Para ello se han generado las superficies de la presa y del terreno y, seguidamente, se han extruido hasta que se ha logrado que se intersecten.

Una vez intersectados los dos volúmenes se ha obtenido el modelo siguiente:

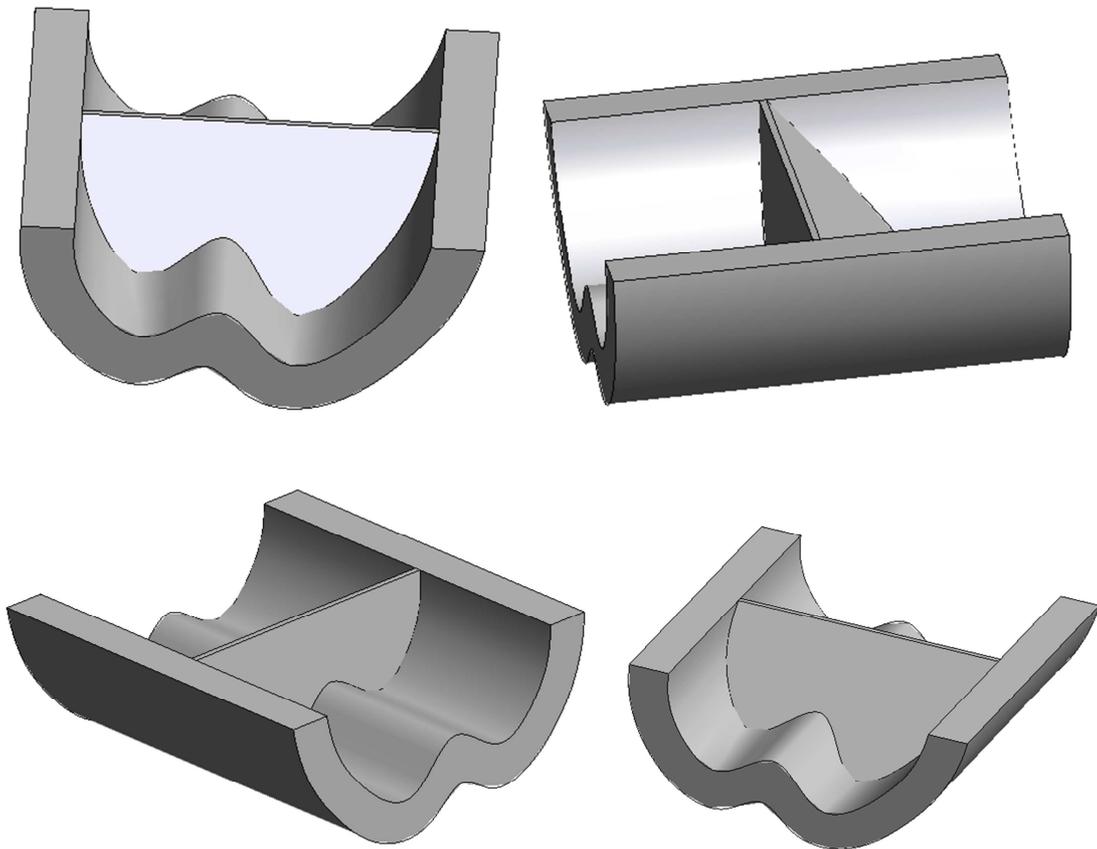


Figura 17: Modelo tridimensional del problema

Con el modelo 3D generado se ha procedido a la asignación de las características de los materiales y a la definición de las condiciones de contorno, que en el caso que nos ocupa se han aplicado sobre la superficie inferior del terreno. En ella se han restringido los movimientos verticales y laterales, mientras que en las superficies frontales del terreno se ha restringido el movimiento en dirección Y (profundidad).

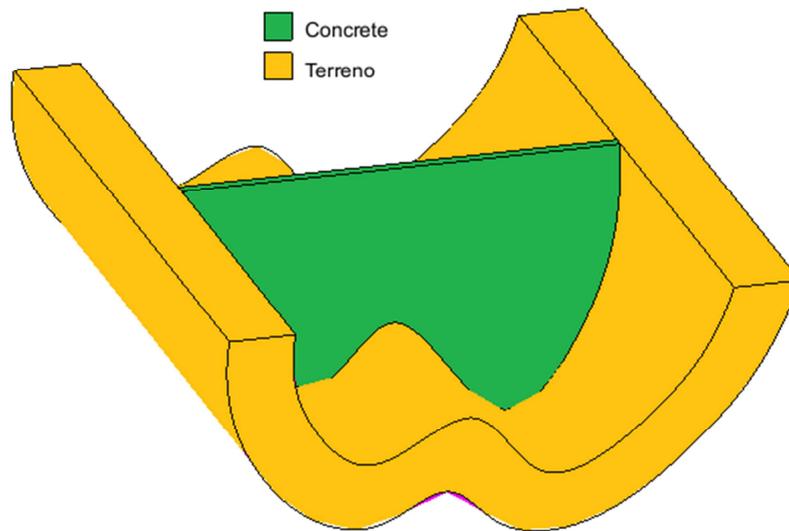


Figura 18: Distribución de materiales en el modelo

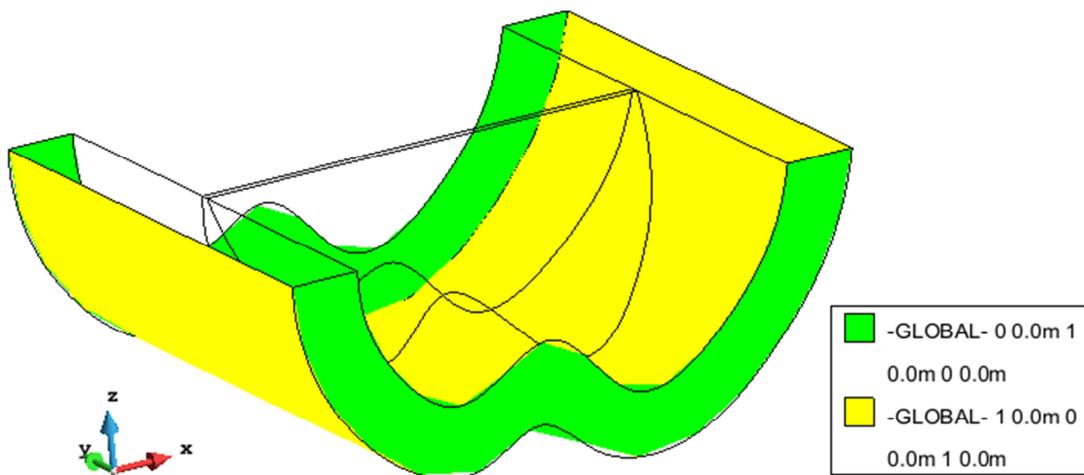


Figura 19: Aplicación de las condiciones de contorno en la superficie inferior del terreno

Por último hace falta definir las cargas aplicadas sobre el modelo. En el primer caso, en el que se tiene en cuenta la situación de embalse vacío, tan solo es necesario considerar el peso propio.

En el segundo caso, al considerar el empuje hidrostático, debe aplicarse una carga hidrostática sobre el terreno con valor  $E = 754600 \text{ N/m}^2$  y también sobre la superficie de la presa que represente la distribución del empuje. Para ello basta con definir la altura de la columna de agua (3 m, ya que hay que tener en cuenta el sentido de la gravedad y la posición del origen de coordenadas, que en este caso se sitúa en la coronación de la presa) y el peso específico del

material que genera el empuje, en este caso agua ( $\gamma_w = 10000 \text{ N/m}^3$ ). Estas cargas se representan en la Figura 20.

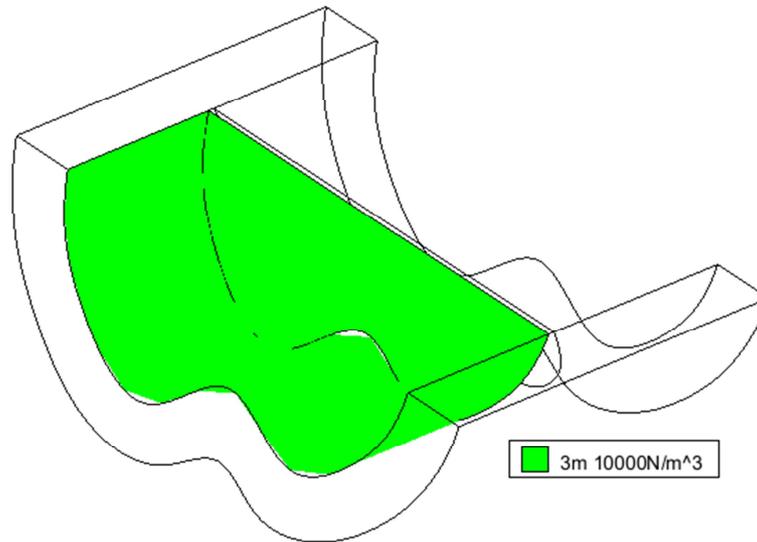


Figura 20: Empuje hidrostático sobre el terreno y la presa

### 3.2.1. Generación de la malla

Con todos los parámetros definidos es momento de mallar el modelo. Para ello se ha optado por una malla de elementos tetraédricos de 4 nodos. El motivo de esta elección reside en la complejidad de la geometría creada y la facilidad de este tipo de elementos a adaptarse a geometrías difíciles. Son elementos que ofrecen buenos resultados y cuyo coste computacional es bajo comparado con otros elementos tridimensionales.

Considerando las dimensiones del modelo se ha optado por un mallado uniforme, es decir, utilizando el mismo tamaño de malla tanto para el terreno como para la presa.

Las mallas elegidas para el cálculo del problema y para el posterior análisis de convergencia van desde el tamaño 30 hasta el tamaño 10. El decrecimiento de tamaño se realiza en escalones de 5.

Los resultados presentados serán los obtenidos con la malla más fina (tamaño 10) ya que se espera que sea la que proporcione resultados más precisos.

Finalmente, utilizando los criterios de mallado antes mencionados se ha obtenido la malla siguiente.

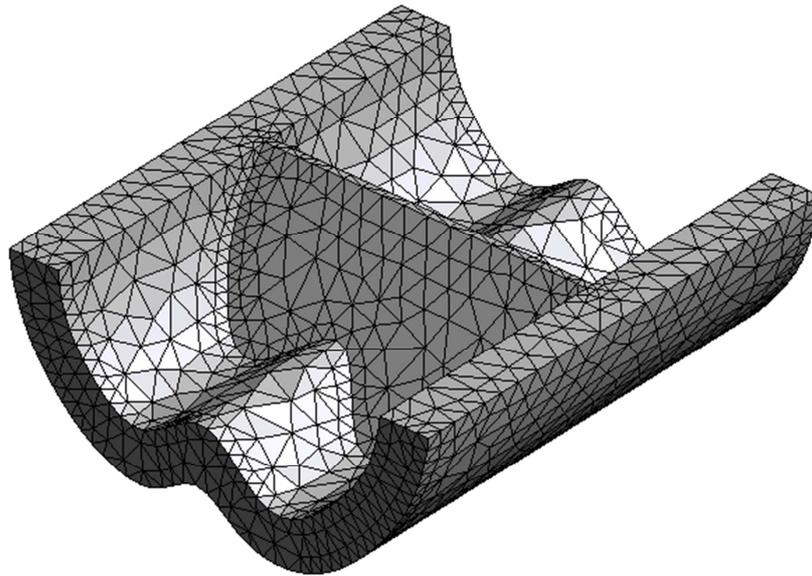


Figura 20: Mallado del modelo

Una vez generada la malla se ha procedido al cálculo del modelo con las dos situaciones de carga.

### 3.3. Cálculo y resultados

#### 3.3.1. Caso 1: Peso propio

Como pasaba en el caso 2D, al analizar la presa en vacío se espera que la presa sufra ciertos desplazamientos en la zona de coronación que generen tracciones en el pide del paramento aguas abajo y en la zona circundante. Por el contrario, en el pie del paramento aguas arriba se espera una situación de compresión.

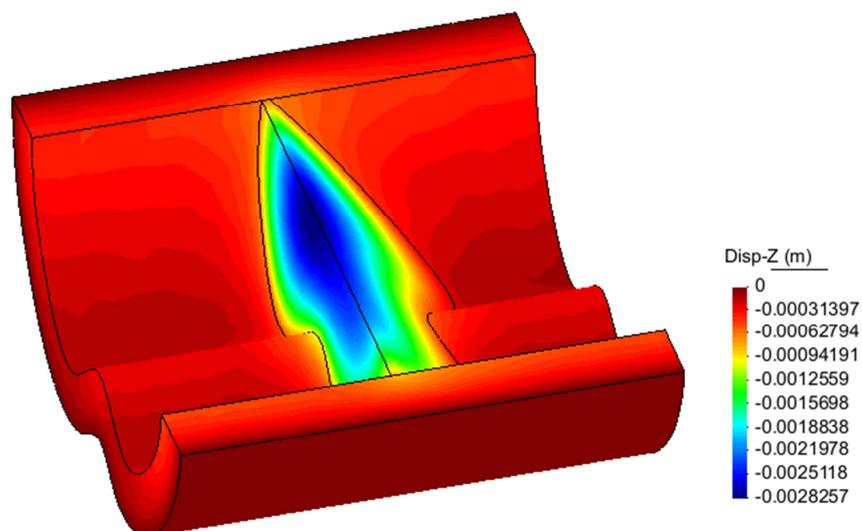


Figura 21: Desplazamientos en dirección Z

En la imagen anterior se puede apreciar como la coronación sufre pequeños descensos debido a la acción del peso propio.

En la configuración deformada se pueden apreciar mejor dichos movimientos. Además se pueden apreciar los movimientos en dirección Y que sufre la presa en la coronación. Dichos movimientos son, en parte, responsables de la aparición de tensiones en la presa.

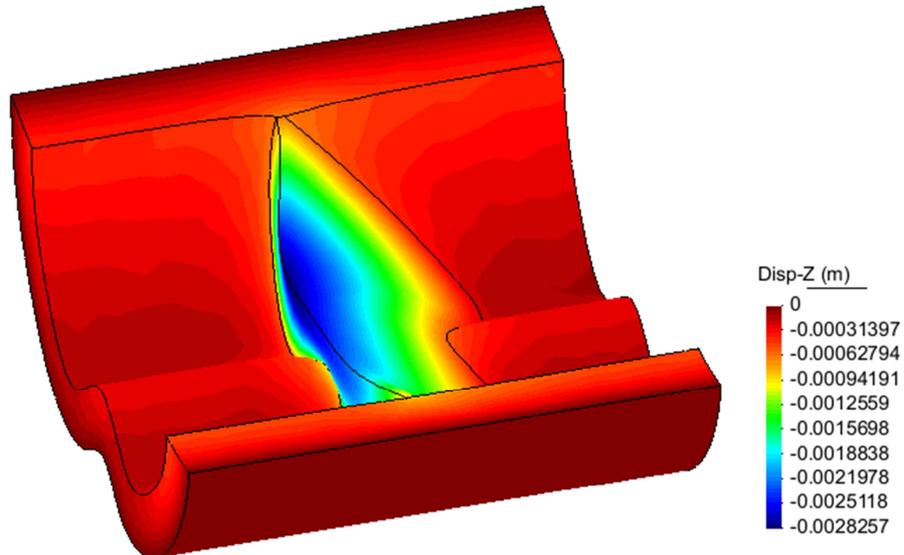


Figura 21: Configuración deformada de la estructura

Para dar validez a los desplazamientos obtenidos se ha realizado el análisis de convergencia pertinente. Como se puede ver en la Figura 22, el valor del desplazamiento máximo en la coronación se estabiliza en torno a los 2.8 mm. La convergencia se logra a partir de los 9000 grados de libertad.

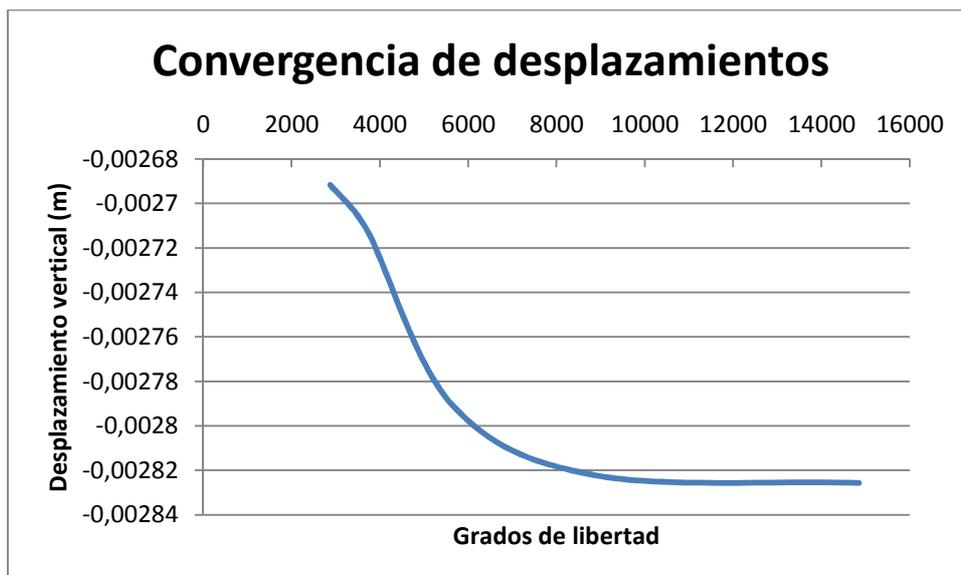


Figura 22: Convergencia de desplazamientos en dirección Z

Con el fin de contrastar las suposiciones hechas a priori, se ha llevado a cabo el cálculo del modelo y se ha obtenido la situación que se aprecia en la figura 23.

Se puede ver como el resultado corresponde a las suposiciones hechas y que además dependiendo de la holografía del terreno las tensiones se ven afectadas. Se puede ver como las tracciones máximas que se producen en la presa se dan en las zonas cercanas a la coronación, en el contacto entre la presa y el terreno. En vista de los desplazamientos observados en la configuración deformada, se considera lógica la aparición de las tensiones en estas zonas. La presa tiende a desplazarse hacia aguas arriba, por lo que comprime la zona del paramento aguas arriba y tracciona el paramento aguas abajo.

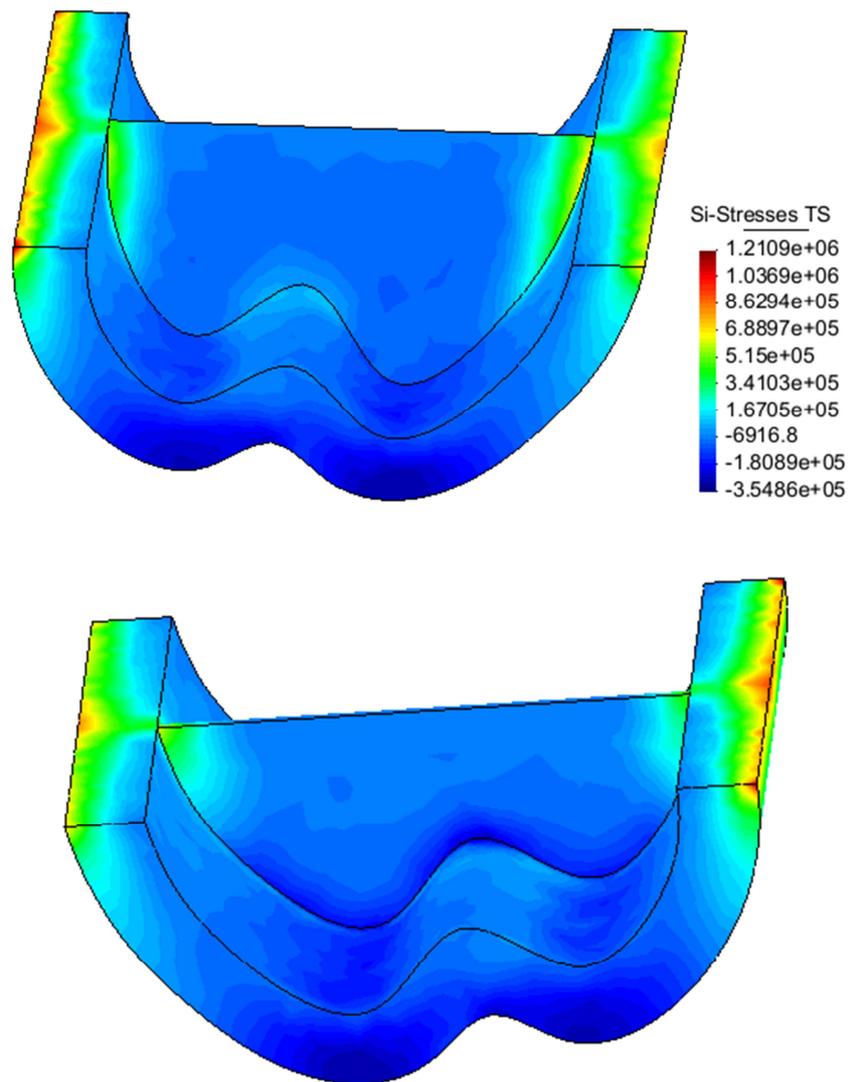


Figura 23: Mapa de tensiones principales  $S_1$  (tracciones máximas)

Se observa que en el terreno se llegan a registrar tracciones de 1.21 MPa pero en lo referente a la presa, el punto con mayor tracción registrada llega a los 0.40 MPa. Como en el caso 2D, las tensiones de tracción en la presa se mantienen muy alejadas del límite, por lo que se puede asegurar que el modelo sometido al peso propio cumple con las restricciones establecidas.

A continuación se presenta un detalle de la zona de la presa donde se producen las tracciones mayores.

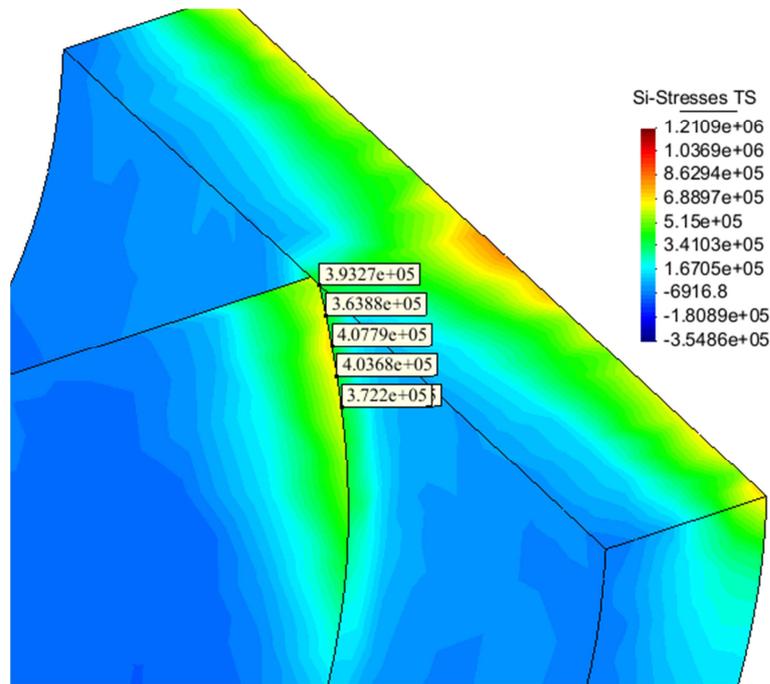


Figura 24: Detalle de la zona traccionada de la presa

Como en el caso bidimensional, se ha realizado un análisis de convergencia para verificar los resultados. Se ha observado que se no se produce concentración de tensiones en la presa, por lo que el resultado en el punto de tracciones máximas se puede considerar fiable. Así pues, para lograr verificar la convergencia se ha tomado el punto con mayor tracción registrada.

La grafica de convergencia obtenida y los parámetros de mallado asociados se presentan a continuación.

Tamaño malla	Nº de nodos	Grados de libertad	Tracción máxima (MPa)
30	960	2880	0,3605
25	1241	3723	0,37164
20	1879	5637	0,39156
15	2947	8841	0,4063
10	4950	14850	0,4078

Tabla 4: Parámetros del análisis de convergencia

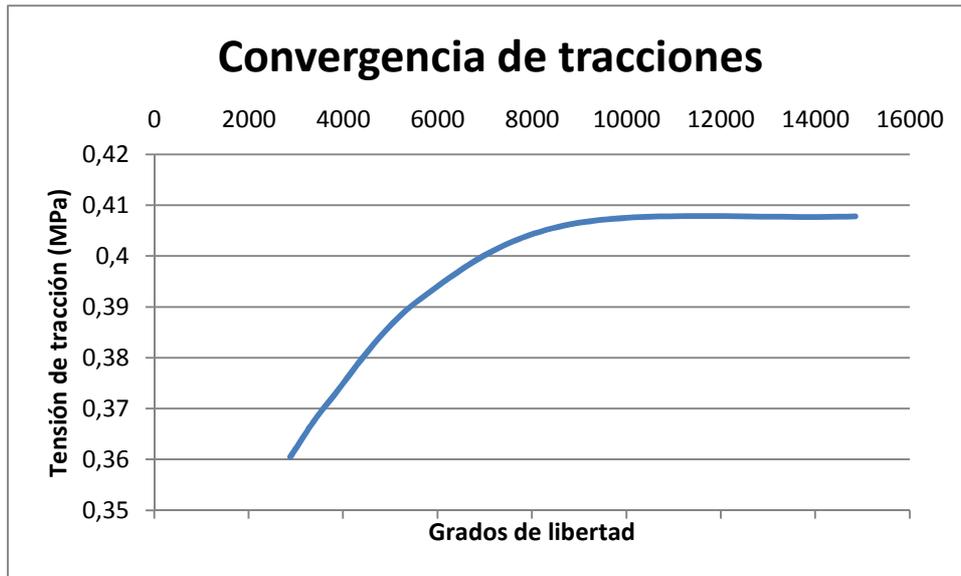


Figura 25: Gráfica de convergencia de tracciones

Como se puede observar en la gráfica de convergencia, la tracción se estabiliza en un valor cercano a 0.41 MPa a partir de los 10000 grados de libertad. Con esto se demuestra que los resultados obtenidos son válidos para el análisis realizado.

### 3.3.2. Caso 2: Peso propio + Empuje hidrostático

En vista de lo obtenido en el apartado anterior es de esperar que al aplicar el empuje hidrostático, los valores de las tracciones aumenten en gran medida debido a los desplazamientos producidos en la coronación a causa del empuje hidrostático.

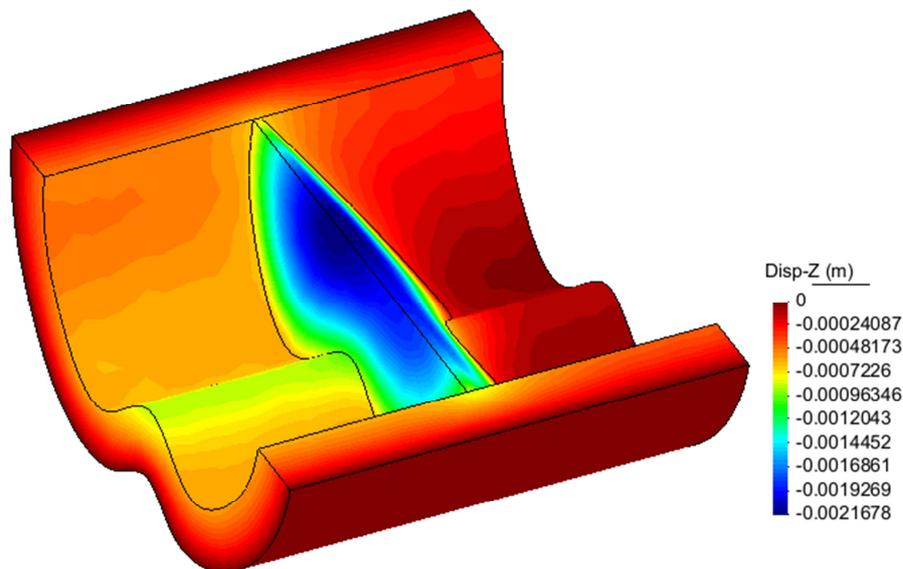


Figura 26: Desplazamientos en dirección Z

Tal y como se puede apreciar la presa sufre desplazamientos verticales cercanos a los 2 mm en la coronación, lo cual, junto al empuje hidrostático contribuye a la aparición de tensiones. Seguidamente se presenta la configuración deformada del modelo, en la que se puede apreciar mejor los movimientos que experimenta la presa debido al empuje.

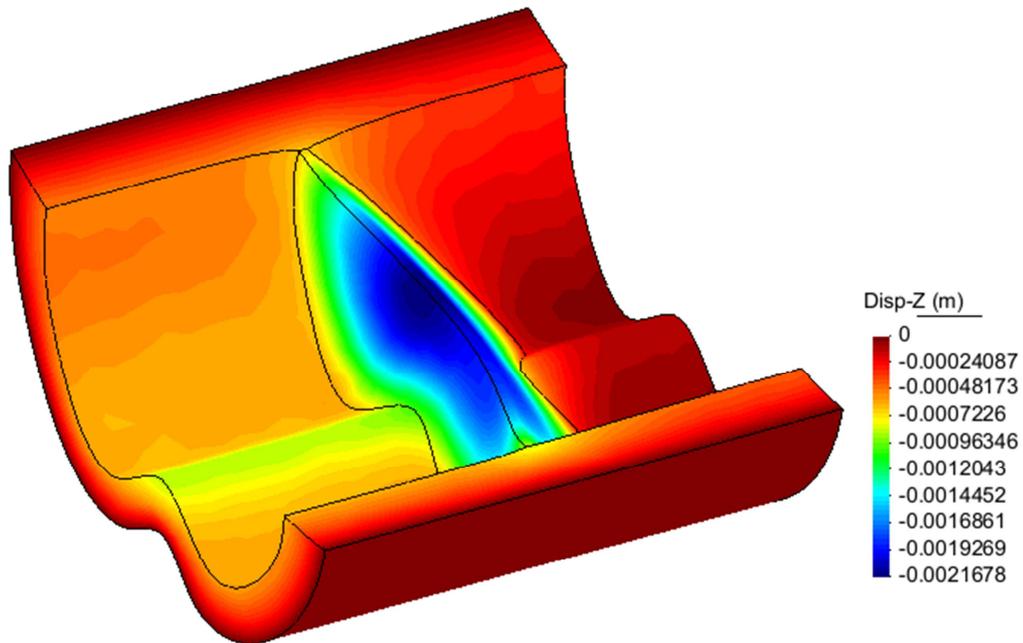


Figura 27: Configuración deformada de la estructura

Se observa como al existir empuje en la presa está se deforma con movimientos que permiten prever la distribución de tensiones. Al desplazarse hacia aguas abajo es de esperar que se produzcan tracciones mayores en el paramento aguas arriba; mientras que en la zona aguas abajo se esperan zonas comprimidas. Una vez más con el fin de verificar los resultados obtenidos se ha llevado a cabo el análisis de convergencia para los desplazamientos.

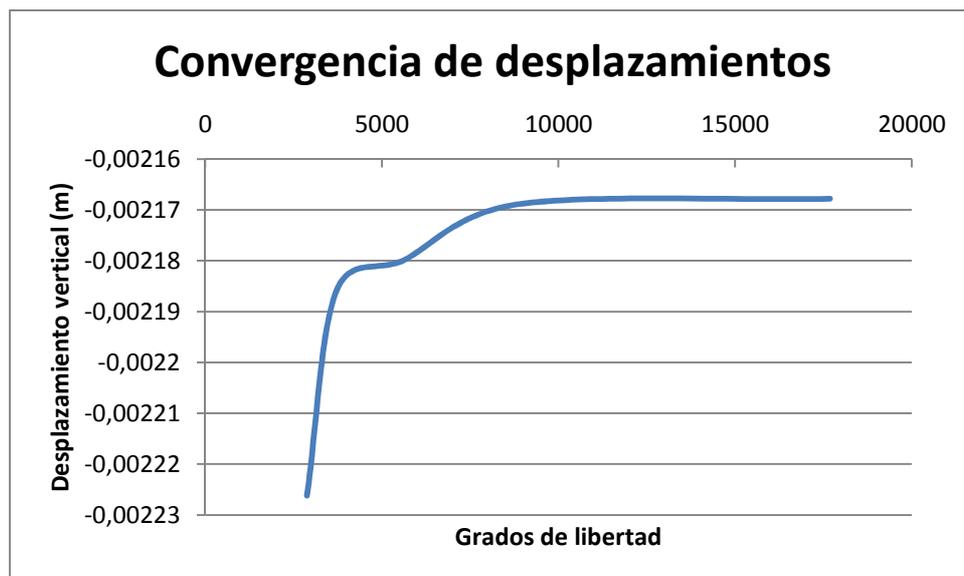


Figura 24: Convergencia de desplazamientos en dirección Z

Se puede ver como a partir de 8000 grados de libertad el resultado se estabiliza, tendiendo al valor final de 2.17 mm. Al haber convergido se considera aceptable el resultado obtenido para los desplazamientos verticales.

A continuación se presenta la distribución de tensiones obtenidas para este caso, la cual corresponde a la tensión principal  $S_1$ , que como se ha comentado anteriormente, presenta las tracciones mayores.

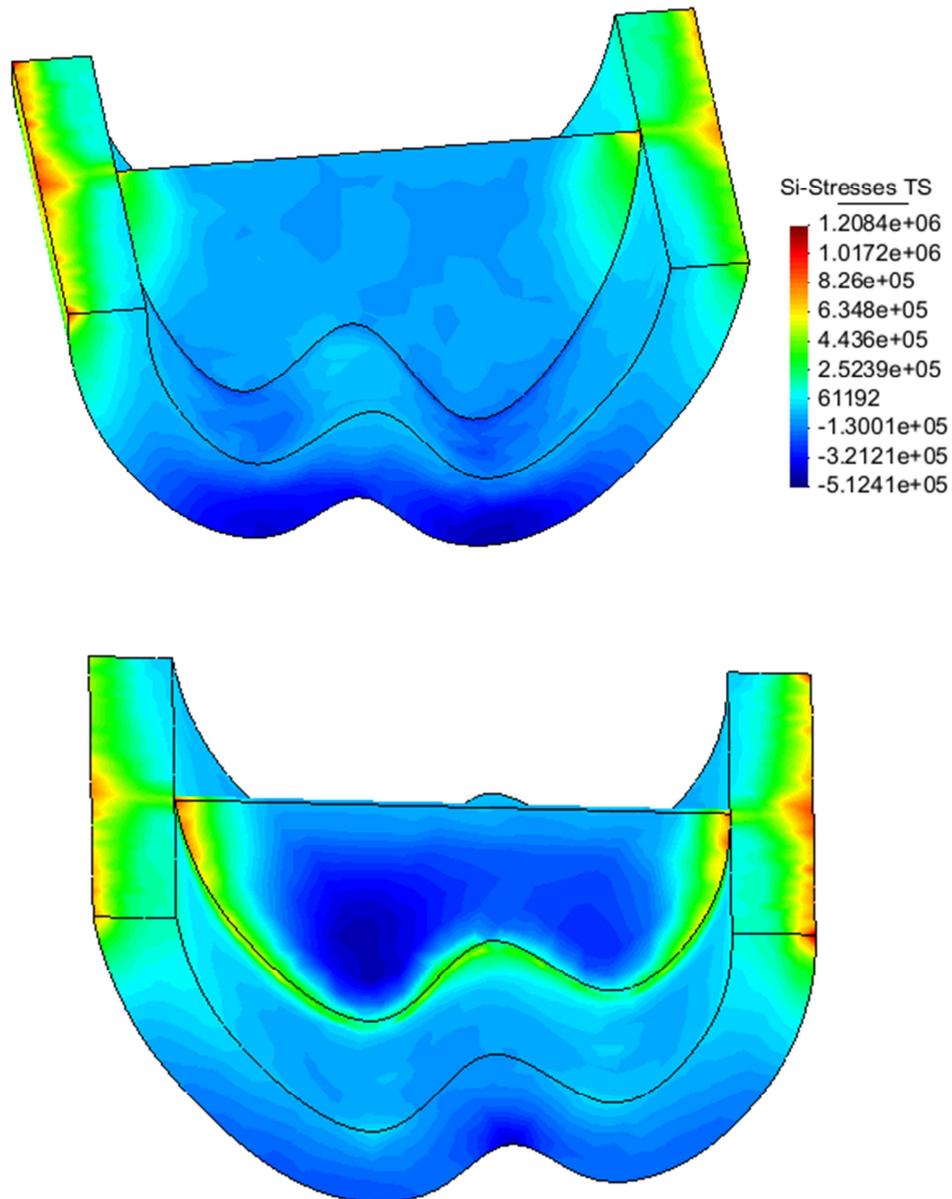


Figura 28: Mapa de tensiones principales  $S_1$  (tracciones máximas)

Como puede verse en la figura anterior, las tracciones mayores se localizan en los extremos de la coronación de la presa, en el contacto entre ésta y el terreno. Además, se puede ver como

dichas tracciones se producen en el paramento donde se aplican los empujes, lo cual es un resultado lógico, por lo que se ha comentado anteriormente para los desplazamientos. El resto de la presa presenta tensiones de compresión producidas fundamentalmente por el peso propio y el empuje del terreno.

Con el fin de apreciar mejor dichas tensiones se presenta el detalle de la zona donde se producen las de mayor magnitud aguas arriba.

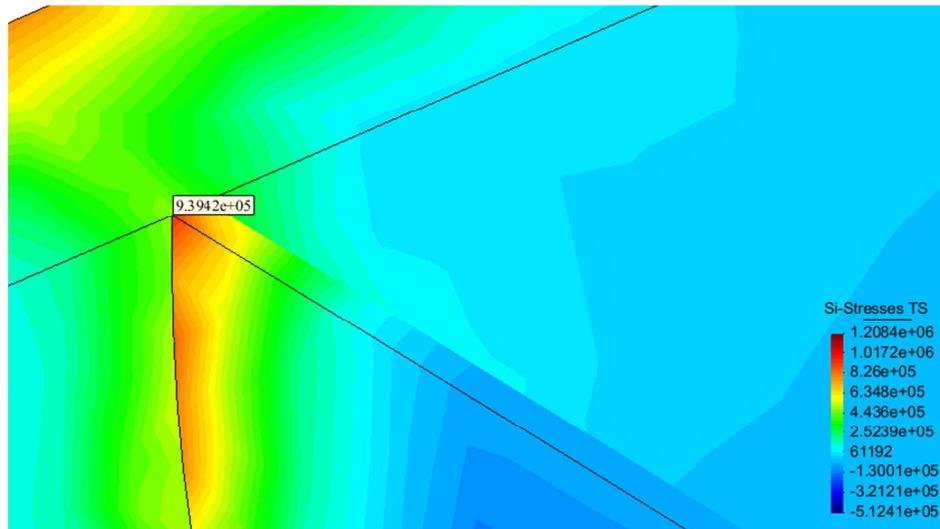


Figura 29: Detalle de la zona traccionada de la presa

Se puede ver como conforme nos alejamos del terreno las tracciones van decreciendo hasta convertirse en tensiones de compresión. Por otro lado se aprecia el descenso de las tracciones con la altura, es decir, cuanto más cerca se está de la coronación, mayores son las tracciones registradas.

Una vez determinada la zona donde se producen las tensiones mayores se debe encontrar el valor de la tracción mayor. En el caso que nos ocupa dicho valor es de 0.93942 MPa. Como se puede ver, se cumple con el límite de 1 MPa, por lo que el diseño de la presa se considera adecuado para hacer frente a las restricciones impuestas.

Con el fin de validar los resultados se ha realizado la convergencia de tracciones. Los parámetros del análisis de convergencia y la gráfica resultante se muestran a continuación.

Tamaño de la malla	Nº de nodos	Grados de libertad	Tracción máxima (MPa)
30	960	2880	0,8603
25	1241	3723	0,88677
20	1873	5619	0,93414
15	2947	8841	0,93878
10	5897	17691	0,93942

Tabla 5: Parámetros del análisis de convergencia

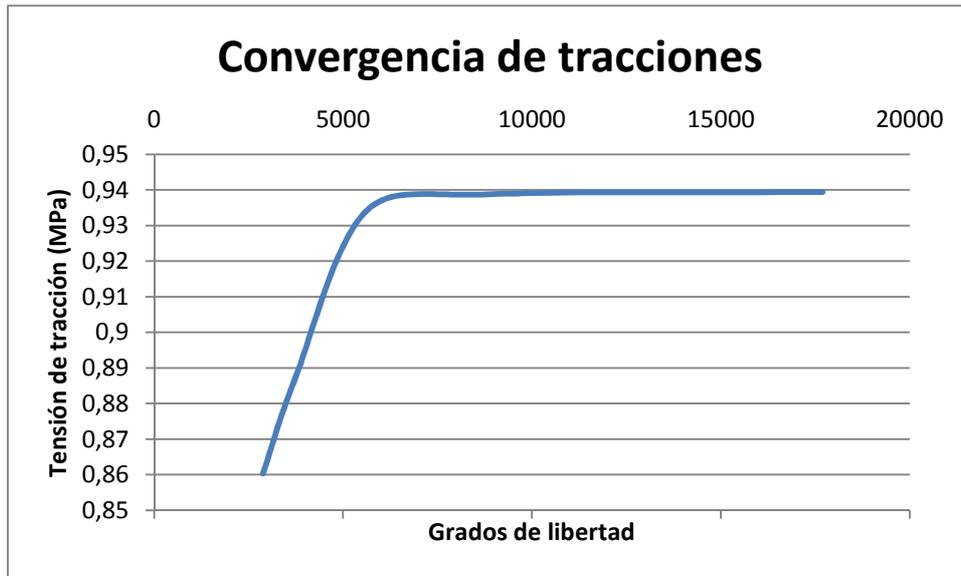


Figura 30: Gráfica de convergencia de tracciones

Una vez más se pone de manifiesto la validez de las tensiones obtenidas, ya que se observa que el resultado converge aun con mallas gruesas y de pocos nodos. Se puede ver como la tensión se estabiliza en un valor cercano a 0.94 MPa.

Finalmente se puede concluir que, como en el caso anterior, las tensiones son inferiores al límite y que, por lo tanto no, los parámetros de diseño utilizados son adecuados.

## 4. Conclusiones

Después de haber evaluado tanto el caso bidimensional como tridimensional del problema se puede afirmar que, para el problema planteado, el análisis bidimensional proporciona buenas estimaciones iniciales, que sirven para hacerse una idea de los esfuerzos resultantes en la estructura y así poder realizar el modelado en tres dimensiones con una aproximación mejor.

El análisis tridimensional proporciona resultados más acordes con la realidad ya que tiene en cuenta todos los factores y parámetros posibles en la simulación. Es por este motivo que para determinar un resultado adecuado para este problema se ha centrado la atención en los resultados obtenidos en el caso 3D.

En cuanto a las tensiones de tracción, se ha podido comprobar que en el caso bidimensional las tracciones se mantenían por debajo del límite establecido de 1 MPa; pero al no ser un resultado del todo representativo del conjunto, al evaluar el problema en 3D, se ha visto como dichas tracciones máximas sufrían variaciones poco importantes, aunque siempre dentro de los límites impuestos por el problema.

En la configuración 3D las tensiones en la presa no han superado la restricción impuesta, llegando a los 0.94 MPa, y debido a esto se asume que el diseño propuesto es válido y adecuado para hacer frente a las sollicitaciones, en ambas situaciones de carga. Así pues, el diseño óptimo de la presa se establece con los valores de  $m$  y  $n$ :

$$m = 0.10 \quad n = 0.90$$

Por último, vale la pena resaltar el hecho de que los desplazamientos máximos registrados, en cualquiera de las direcciones y para cualquier configuración de carga, no han superado los 3 mm, lo cual es un factor a tener en cuenta en el diseño estructural de la presa por temas de fisuración y mantenimiento.