

Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona
MECCP

Ingeniería de Estructuras

Trabajo de curso S-05: Presa de Gravedad

Mònica Dingle Palmer

Enero 2019



Índice general

1. Introducción	6
1.1. Descripción del problema	6
1.2. Objetivos a resolver	7
2. Caso bidimensional	8
2.1. Modelización	8
2.1.1. Fenómenos a capturar	8
2.1.2. Formulación básica	8
2.1.2.1. Campo de desplazamientos	9
2.1.2.2. Campo de deformaciones	9
2.1.2.3. Campo de tensiones	9
2.1.2.4. Principio de los Trabajos Virtuales y discretización en elementos finitos	10
2.1.2.5. Discretización en elementos finitos	10
2.1.3. Definición del modelo	11
2.1.3.1. Geometría	11
2.1.3.2. Condiciones de contorno	12
2.1.3.3. Cargas	12
2.1.3.4. Materiales	13
2.1.3.5. Discretización en elementos finitos	13
2.2. Resultados	15
2.2.1. Presentación y discusión de resultados	15
2.2.1.1. Caso 1: peso propio	15
2.2.1.2. Caso 2: peso propio y presión hidrostática	17
2.2.2. Detección de problemas y posibles modificaciones o alternativas	18
2.3. Conclusiones caso bidimensional	19
3. Modelo en 3D	20
3.1. Modelización	20
3.1.1. Formulación básica	20
3.1.1.1. Campo de desplazamientos	20
3.1.1.2. Campo de deformaciones	20
3.1.1.3. Campo de tensiones	21
3.1.1.4. Principio de los Trabajos Virtuales	22
3.1.2. Definición del modelo	22

3.1.2.1.	Geometría	22
3.1.2.2.	Condiciones de contorno	22
3.1.2.3.	Propiedades de los materiales	23
3.1.2.4.	Cargas aplicadas	23
3.1.2.5.	Discretización en elementos finitos	24
3.2.	Resultados	25
3.2.1.	Presentación de resultados y post-proceso de la figura	25
3.2.1.1.	Caso 1. Peso propio	25
3.2.1.2.	Caso 2. Presión hidrostática y peso propio	26
3.2.2.	Detección de problemas y posibles alternativas y modificaciones	27
3.3.	Conclusiones caso tridimensional	27
4.	Conclusiones finales	28

Índice de figuras

1.1. Geometría de la presa en dos dimensiones.	6
1.2. Geometría del caso tridimensional.	7
2.1. Geometría de la presa en <i>GiD</i>	11
2.2. Condiciones de contorno de la presa y del terreno.	12
2.3. Cargas definidas en <i>GiD</i>	13
2.4. Materiales de la presa y del terreno.	13
2.5. Ejemplo de malla usada.	14
2.6. Diagrama de convergencia de desplazamientos verticales.	14
2.7. Resultados del caso 1 (peso propio).	16
2.8. Resultados del caso 2 (presión hidrostática y peso propio).	17
2.9. Detalle del área con tracciones altas.	18
3.1. Geometría en el caso 3D.	22
3.2. Condiciones de contorno en el caso 3D.	23
3.3. Materiales en el caso 3D.	23
3.4. Carga hidrostática en el caso 3D.	24
3.5. Ejemplo de malla en el caso 3D.	24
3.6. Diagrama de convergencia en desplazamientos en el eje <i>y</i> para elementos tetraédricos de 3 nodos.	25
3.7. Desplazamientos en el caso 3D.	25
3.8. Tensiones principales máximas en el caso 3D.	26
3.9. Desplazamientos en el caso 3D (presión hidrostática).	26
3.10. Tensiones principales máximas en el caso 3D (presión hidrostática).	27

Capítulo 1

Introducción

1.1. Descripción del problema

En este trabajo, se estudia el comportamiento de una presa de gravedad sobre un terreno homogéneo y sometida a su peso propio junto a la presión hidrostática generada por el agua del embalse.

En primer lugar, se estudiará el caso bidimensional para poder dimensionarla (con las correspondientes restricciones geométricas y tensionales), con los dos casos de carga anteriormente mencionados. La geometría aproximada de la presa, junto con las restricciones geométricas que se imponen, se presenta a continuación en la siguiente figura (??):

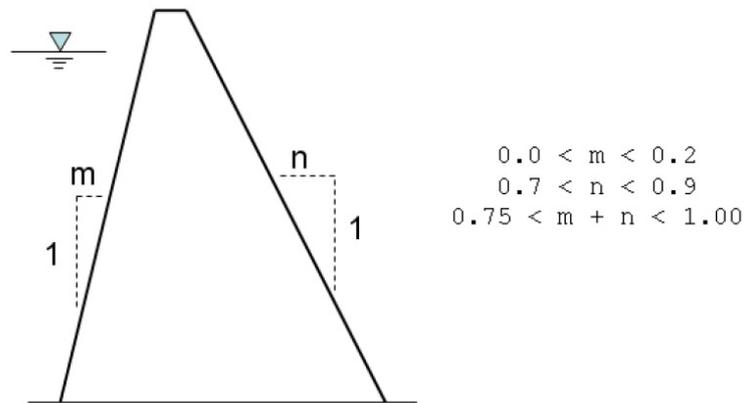


Figura 1.1: Geometría de la presa en dos dimensiones.

La altura de la presa deberá ser de 80 m, con una anchura en coronación de 6 m, y la cota del agua será de 77 m. Todas las cotas se referirán a la altura respecto del terreno.

Posteriormente, se procederá a verificar el diseño con una simulación en 3D de la presa. La geometría aproximada de la presa junto con el perfil del emplazamiento se muestra en

la siguiente figura (fig. 1.2)

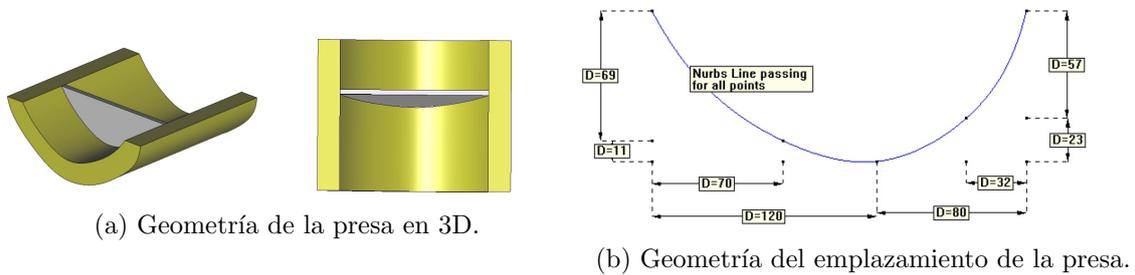


Figura 1.2: Geometría del caso tridimensional.

1.2. Objetivos a resolver

El objetivo final de la simulación será el de obtener las dimensiones de la presa de forma que no se superen en ningún punto los **0.1 MPa de tracciones** cuando ésta se encuentra sometida al peso propio y a la presión hidrostática generada por el agua del embalse.

Capítulo 2

Caso bidimensional

En este capítulo, se estudia el caso bidimensional. Se dimensionará la presa en 2D de forma que se cumplan las restricciones geométricas y tensionales impuestas, y se analizarán los resultados para caracterizar la respuesta estructural de la presa ante las cargas.

2.1. Modelización

2.1.1. Fenómenos a capturar

Los fenómenos a capturar serán principalmente las tensiones generadas en la presa y en el terreno, además de los desplazamientos. Como se ha comentado, el objetivo principal va a ser determinar la geometría de la presa para la cual las tracciones máximas no superen los 0.1 MPa en ningún punto.

Una vez dicha geometría haya quedado definida, se procederá a estudiar los esfuerzos en la presa junto con los asentamientos que se generen para caracterizar su respuesta y ver si es aceptable o no.

2.1.2. Formulación básica

Para analizar el caso en dos dimensiones, se aplicará el método de elementos finitos a una estructura que cumple las hipótesis de elasticidad bidimensional. Una de ellas, la referente a la geometría, es que dicha estructura se caracteriza por tener la forma aproximada de un prisma recto. Ahora bien, dentro de los problemas de elasticidad bidimensional, deberemos distinguir dos casos: problemas de *tensión plana* y problemas de *deformación plana*. Dicha clasificación se basa en las proporciones que guardan las dimensiones y en la posición y disposición de las cargas.

En el caso que nos trae, nos encontramos claramente ante un caso de **deformación plana**. Dichos problemas se caracterizan por tener una de las dimensiones (en este caso, longitud) mucho más grandes que las otras dos, y sobre ella, solamente actúan cargas uniformemente distribuidas a lo largo de la longitud y contenidas en un plano ortogonal al eje que une los centros de gravedad de las distintas secciones transversales [1].

A continuación, se detalla la formulación básica de la Teoría de Elasticidad bidimensional particularizada para el caso de deformación plana junto con su aplicación al método de los elementos finitos.

2.1.2.1. Campo de desplazamientos

Debido a las características geométricas y de cargas de una estructura en estado de tensión y deformación plana, se establece la hipótesis de que todas las secciones perpendiculares al eje prismático z se deforman en su plano y de manera idéntica. Así pues, el campo de desplazamientos se define conociendo las componentes x e y de sus puntos, quedando el vector de desplazamientos siguiente:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$$

siendo $u(x, y)$ y $v(x, y)$ los desplazamientos en las direcciones x e y respectivamente.

2.1.2.2. Campo de deformaciones

Dado el campo de desplazamientos anteriormente definido, el campo de deformaciones;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.4)$$

En el caso de deformación plana, se establece la hipótesis de que $\varepsilon_z = 0$. De este modo, el vector de deformaciones significativas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T \quad (2.5)$$

2.1.2.3. Campo de tensiones

Siendo $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, se deduce que $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Además, siendo $\varepsilon_z = 0$, σ_z no trabaja y tenemos que el vector de tensiones significativas tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \quad (2.6)$$

En este caso, no tenemos tensiones iniciales ni debidas a efectos térmicos, así que la relación entre tensiones y deformaciones vendrá dada por la ecuación siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.7)$$

donde la matriz constitutiva, caracterizada para problemas de deformación plana se escribe:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.8)$$

$$d_{12} = d_{21} = d_{11} \frac{\nu}{1-\nu} \quad (2.9)$$

$$d_{33} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.10)$$

2.1.2.4. Principio de los Trabajos Virtuales y discretización en elementos finitos

Podemos escribir el Principio de los Trabajos Virtuales de la siguiente manera:

$$\iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \iint_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} t dA + \oint_t \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} ds + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i \quad (2.11)$$

Nótese que se pueden reducir en una dimensión las integrales pues son constantes respecto al espesor. Así pues, queda definida la expresión matricial del PTV, donde $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ son las deformaciones virtuales, $\delta \mathbf{u}$ los desplazamientos virtuales, $\boldsymbol{\sigma}$ las tensiones, \mathbf{b} las fuerzas másicas de volumen, \mathbf{t} las de superficie, \mathbf{q}_i las puntuales, y t el espesor.

2.1.2.5. Discretización en elementos finitos

El campo de desplazamientos se discretizará de la siguiente forma:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad (2.12)$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i v_i \quad (2.13)$$

donde n es el número de nodos, N_i las funciones de forma del nodo i , y (u_i, v_i) los desplazamientos horizontales y verticales del nodo i . Matricialmente, podemos escribir:

$$\mathbf{u} = [u, v]^T = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{N} = [N_1, \dots, N_n] \quad (2.15)$$

$$\mathbf{a}^{(e)} = [\mathbf{a}_1^{(e)}, \dots, \mathbf{a}_n^{(e)}]^T \quad (2.16)$$

Así pues, habiendo definido la discretización del campo de desplazamientos, la discretización del campo de deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} \quad (2.17)$$

donde \mathbf{B} es la matriz que contiene las derivadas de las funciones de forma;

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n] \quad (2.18)$$

Si sustituimos dichas expresiones en la ecuación del PTV, obtenemos la expresión de la matriz de rigidez y de los vectores de fuerzas:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dA \quad (2.19)$$

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA \quad (2.20)$$

$$\mathbf{f}_t^{(e)} = \oint_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} t dA \quad (2.21)$$

Ensamblando las contribuciones de cada elemento (imponiendo el equilibrio global de la malla) se obtendrían los vectores anteriores para el sólido entero.

2.1.3. Definición del modelo

En esta sección, se detalla el modelo que se va utilizar para estudiar la presa, es decir, se van a detallar los parámetros del *pre-proceso*. Para realizar la simulación, se ha usado el software GiD, seleccionando el tipo de problema como *RamSeries Educational 2D, Plane State* y se ha definido el tipo de problema como *Plane Strain*.

2.1.3.1. Geometría

La geometría de la presa se ha definido como se muestra en la siguiente figura (fig. 2.1):

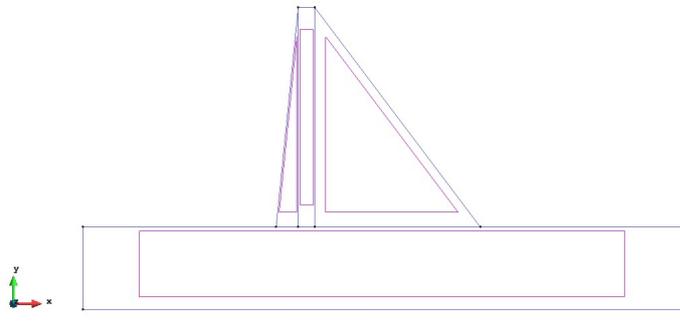


Figura 2.1: Geometría de la presa en *GiD*.

La altura de la presa es de 80 m, con una anchura en coronación de 6 m. Las pendientes de los taludes aguas arriba y aguas abajo son los parámetros que se desea encontrar, así que irán cambiando según la simulación hasta encontrar los valores óptimos que hagan que las tracciones máximas no superen los 0.10 MPa.

En cuanto al terreno, se le ha dado un desarrollo de 200 m, y una profundidad de 30 m, lo suficiente como para poder observar la influencia de la presa sobre éste.

2.1.3.2. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno van a ser las siguientes: la presa va a tener la base empotrada en el terreno, y en cuanto al terreno, se ha impuesto que los desplazamientos en x sean cero en los laterales, y que los desplazamientos tanto en x como en y sean cero en la base. Como se ha comentado anteriormente, se ha escogido una profundidad y un desarrollo suficiente como para poder imponer dichos desplazamientos y que sean coherentes. La influencia de la presa estará contenida dentro de esos límites.

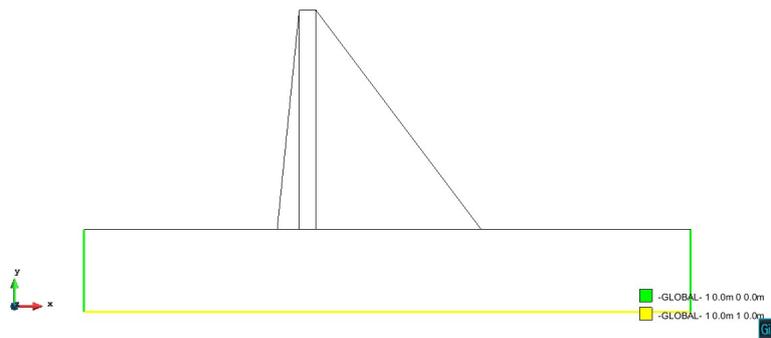
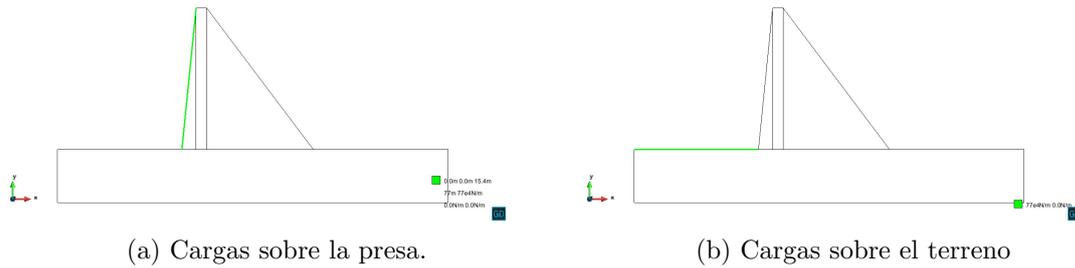


Figura 2.2: Condiciones de contorno de la presa y del terreno.

En cuanto a la interfaz presa-terreno, se ha modelizado con la misma línea para simular que la base de la presa va a presentar los mismos desplazamientos que el terreno en esos puntos.

2.1.3.3. Cargas

En cuanto a las cargas, se ha tenido en cuenta el peso propio y la presión hidrostática sobre el terreno y sobre el paramento aguas arriba de la presa. En la siguiente figura, se pueden ver las cargas que se han definido sobre la estructura y sobre el terreno:

Figura 2.3: Cargas definidas en *GiD*.

2.1.3.4. Materiales

El material que corresponde a la presa es el hormigón. En cuanto al terreno, se ha considerado un terreno homogéneo con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \gamma_h &= 25000 \text{ N/m}^3 & \gamma_t &= 20000 \text{ N/m}^3 \\ \nu_h &= 0,2 & \nu_t &= 0,30 \\ E_h &= 2,2 \text{ GN/m}^2 & E_t &= 23,7 \text{ GN/m}^2 \end{aligned}$$

En la siguiente figura, se muestra cómo se han definido las superficies y sus materiales:

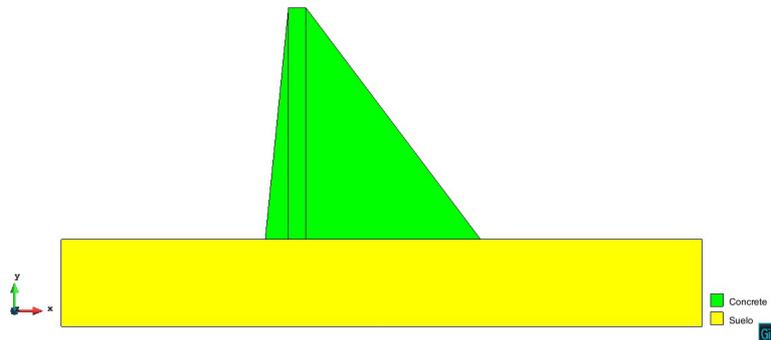


Figura 2.4: Materiales de la presa y del terreno.

2.1.3.5. Discretización en elementos finitos

Descripción de la malla

Para mallar la figura, se ha decidido usar un tamaño de malla diferente para la presa y para el terreno, pues son dominios que requieren diferente precisión al realizar los cálculos. La malla que se va a usar en la presa va a ser más fina que la del terreno, pues en realidad lo que estamos estudiando es la estructura y no el suelo.

Se han considerado diferentes opciones a la hora de mallar: triángulos de 3 y de 6 nodos, y cuadriláteros de 4, 8 y 9 nodos, es decir, un total de 5 elementos diferentes.

En la siguiente figura, se muestra un ejemplo de malla que se ha usado. Nótese como se ha refinado dentro del dominio de la presa.

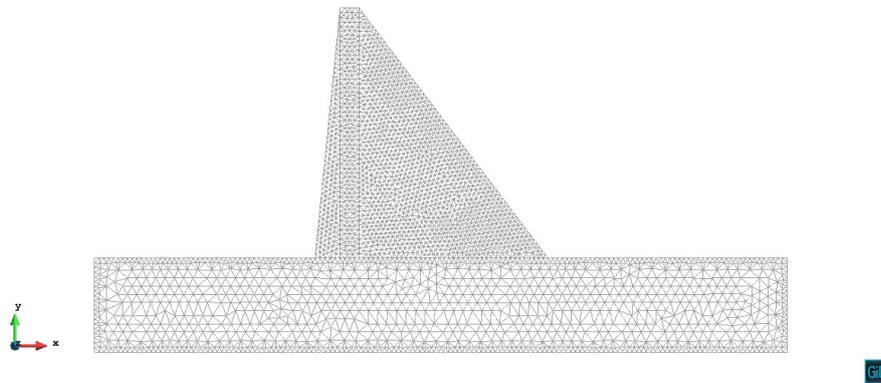


Figura 2.5: Ejemplo de malla usada.

Calidad de la malla

Antes de empezar a estudiar el estado tensional de la presa, se debe elegir una malla que proporcione resultados de calidad. Para ello, se ha hecho el diagrama de convergencia para los distintos tipos de elementos, con el objetivo de ver cuáles convergen y a qué velocidad. En la siguiente figura, se presenta el diagrama de convergencia de desplazamientos verticales máximos de la estructura:

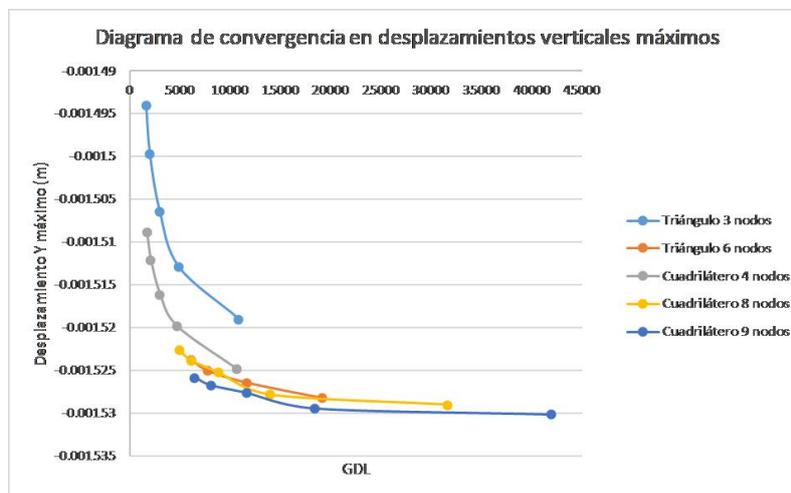


Figura 2.6: Diagrama de convergencia de desplazamientos verticales.

Como se puede observar en el diagrama, los elementos lineales no acaban de converger, pues necesitaríamos una malla muy fina para poder obtener resultados consistentes. En cambio, los elementos cuadráticos (triángulos de 6 nodos y cuadriláteros de 8 y 9 nodos) convergen mucho más rápido, y con una malla menos fina, es decir, menos grados de libertad en total, conseguimos la convergencia de resultados. Así pues, se ha decidido usar

cuadriláteros de 6 nodos, imponiendo un tamaño de malla de **1.5 para la presa y 3 para el terreno**.

De esta forma, aseguramos unos resultados fiables y suficientemente precisos.

2.2. Resultados

Se distinguirán dos casos: uno en el que no tenemos agua, la presa solo soporta el peso propio, y otro en el cual tenemos en cuenta la presión hidrostática sobre la presa y sobre el terreno.

Así pues, se ha dimensionado la presa de forma que las tracciones sean las mínimas posibles, siendo los valores de los parámetros n y m :

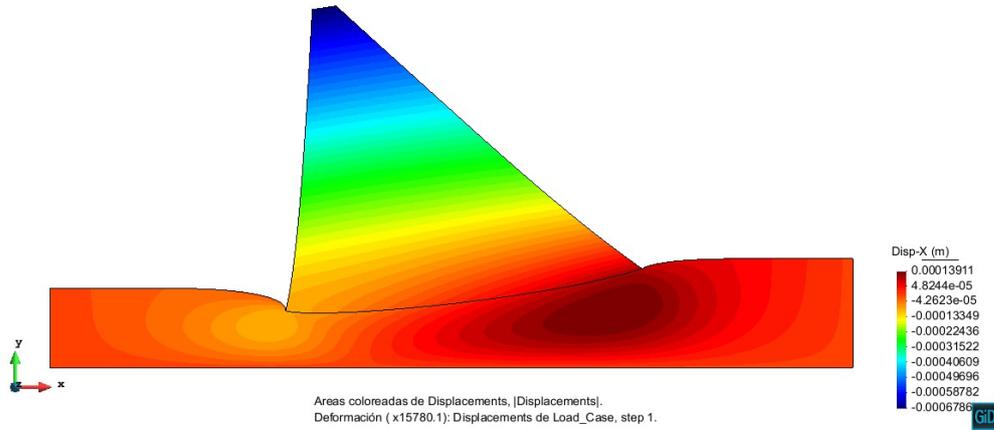
$$n = 0,2$$

$$m = 0,8$$

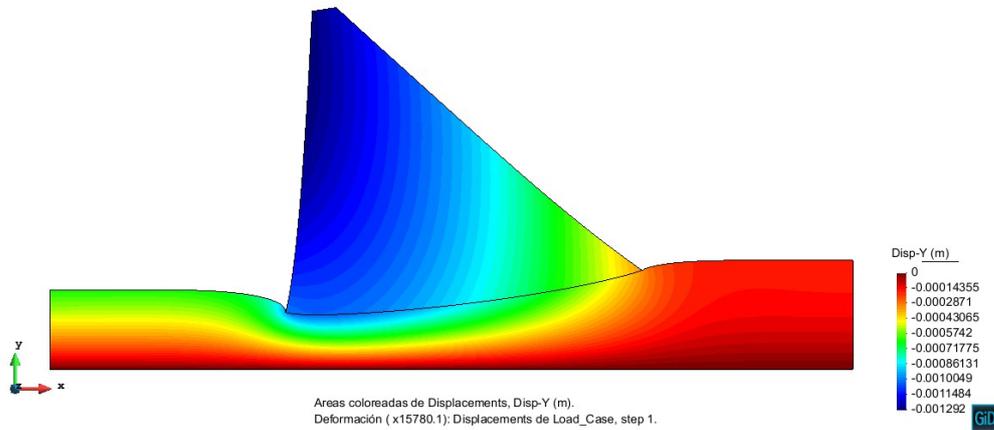
2.2.1. Presentación y discusión de resultados

2.2.1.1. Caso 1: peso propio

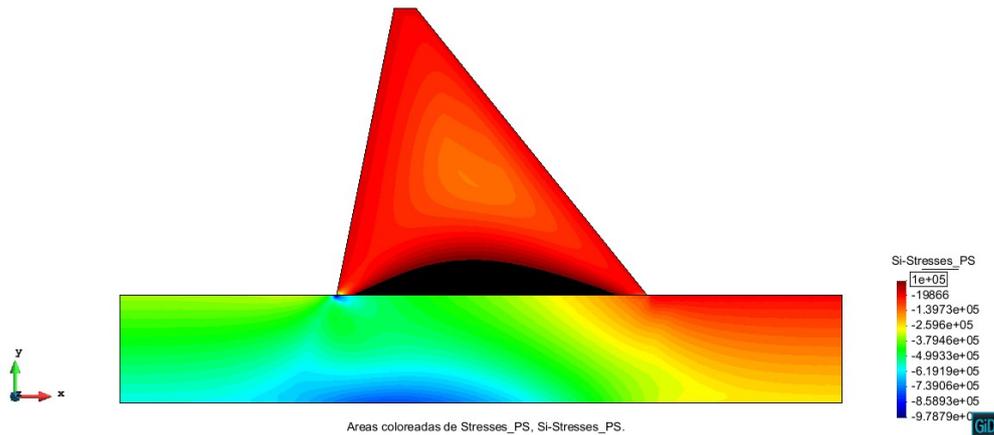
Los resultados de este caso se presentan en las siguientes figuras. Nótese que la mayor parte de la presa está sometida a tracciones inferiores a 0.1 MPa, aunque tenemos una zona conflictiva en la cual hay una concentración de tensiones ligeramente superior a 0.1 MPa. Aún así, de las opciones que se tenían a la hora de dimensionar, cumpliendo con los requisitos geométricos impuestos, esta era la que presentaba una concentración de tracciones más pequeña.



(a) Desplazamientos en dirección x y deformada de la figura.



(b) Desplazamientos en dirección y y deformada de la figura.

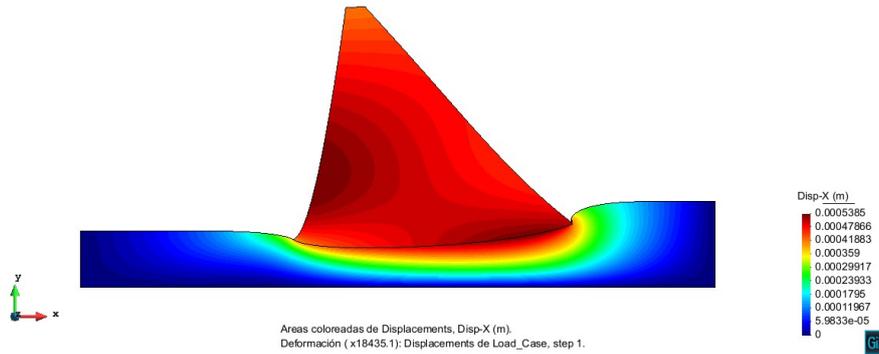


(c) Tensiones sobre la presa.

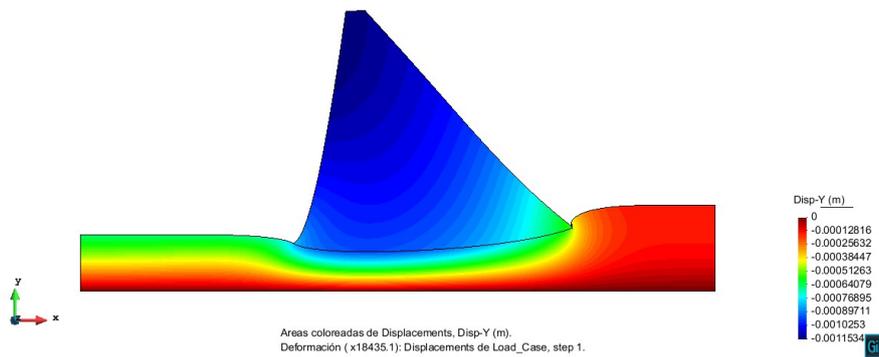
Figura 2.7: Resultados del caso 1 (peso propio).

2.2.1.2. Caso 2: peso propio y presión hidrostática

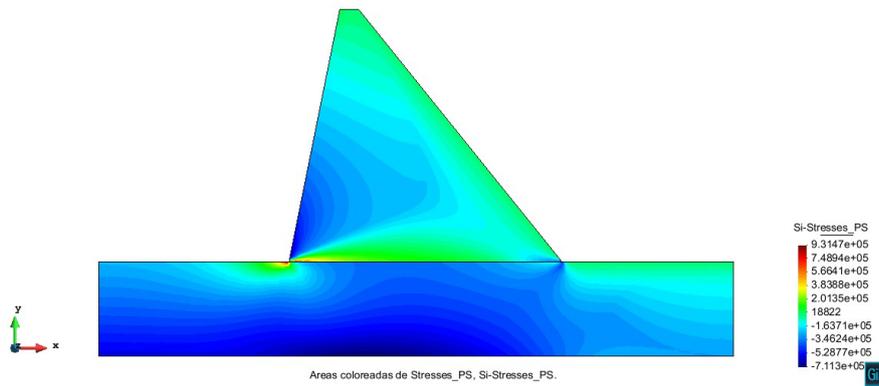
A continuación, se presentan los resultados correspondientes al caso en el cual se tiene en cuenta la presión hidrostática. En las siguientes figuras, se muestran los desplazamientos y las tensiones en la presa:



(a) Desplazamientos en dirección x y deformada de la figura.



(b) Desplazamientos en dirección y y deformada de la figura.



(c) Tensiones sobre la presa.

Figura 2.8: Resultados del caso 2 (presión hidrostática y peso propio).

En la figura 2.8c, se pueden observar las tensiones en la presa. Nótese que la mayor parte de la presa se encuentra a compresión o bien a tracciones menores de 0.1 MPa, pero hay una pequeña zona donde las tracciones se disparan. El detalle de dicha área se muestra a continuación:

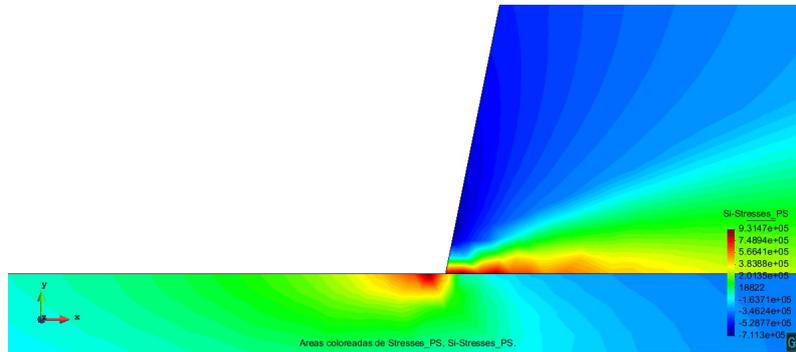


Figura 2.9: Detalle del área con tracciones altas.

Este punto corresponde a una zona donde hay cambios abruptos de geometría, de modo que al discretizar, la solución presenta una concentración de tensiones muy alta. Dichas tensiones no son representativas, pues son básicamente errores que presenta la discretización y en la realidad no se observan, de forma que para el análisis que estamos haciendo ahora no se deberían tener en cuenta. Más adelante se plantearán formas de resolver dicho problema.

2.2.2. Detección de problemas y posibles modificaciones o alternativas

En la sección anterior, se ha visto que la geometría del conjunto genera problemas de concentraciones de tensiones en áreas donde la geometría cambia abruptamente. Dado este problema, las tracciones máximas se disparan, pero hay que tener en cuenta que dichos valores máximos no son representativos, pues no pertenecen a la respuesta estructural de la presa.

Para solucionar dichos problemas, podemos tomar dos caminos, ambos proporcionarían una disminución de las tensiones máximas "ficticias" generadas por la geometría definida:

- Refinar la malla mucho en las zonas donde la geometría cambia abruptamente.
- Suavizar dichos cambios en la geometría (suavizar las esquinas).

En cuanto al resto, ya se ha visto que la malla que se ha usado proporciona unos resultados suficientemente fiables, en la sección donde se detalla la discretización se puede comprobar claramente como los resultados convergen (fig. 2.6).

2.3. Conclusiones caso bidimensional

Una vez analizado el problema, se puede concluir que los resultados son satisfactorios. La mayor parte de la presa trabaja a compresión, y las zonas donde hay tracciones presentan valores de dicha tensión que no superan los admisibles.

En cuanto a los asentamientos, no se ha impuesto ninguna restricción respecto a ellos, pero se deben tener en cuenta a la hora de dimensionar la presa, pues pueden generar problemas a largo plazo.

Capítulo 3

Modelo en 3D

En este capítulo, se estudia el caso 3D de la presa. Las dimensiones serán las previamente establecidas en el capítulo anterior (modelo en 2D).

3.1. Modelización

Los fenómenos que se quieren capturar en este caso van a ser los mismos que en el caso anterior: se quieren comprobar las tracciones en la presa y ver si superan los valores máximos admisibles. Lo que cambiará ahora es la formulación del problema, pues nos encontramos ante un problema de sólidos tridimensionales.

3.1.1. Formulación básica

La teoría básica que se va a usar en este problema es la de la elasticidad tridimensional. Los conceptos básicos (campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones) se presentan a continuación, junto con la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales, que se usará para encontrar dichos campos que caracterizan la respuesta de la estructura.

3.1.1.1. Campo de desplazamientos

El movimiento de cada punto del sólido se define por sus tres componentes:

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T \quad (3.1)$$

donde u, v, w son los movimientos en las respectivas direcciones de los ejes x, y, z .

3.1.1.2. Campo de deformaciones

El campo de deformaciones vendrá determinado por seis componentes:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

siendo las tres primeras componentes las deformaciones normales y las tres últimas las deformaciones tangenciales.

3.1.1.3. Campo de tensiones

Dado el campo de deformaciones, tenemos que el campo de tensiones viene definido de la siguiente forma;

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

donde las tres primeras componentes son las tensiones normales y las tres últimas las tangenciales. La relación tensión-deformación, teniendo en cuenta que no tenemos deformaciones ni tensiones iniciales, viene dada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.2)$$

donde \mathbf{D} es la matriz constitutiva, cuya expresión se muestra a continuación:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

donde E es el módulo de elasticidad y ν el coeficiente de Poisson.

3.1.1.4. Principio de los Trabajos Virtuales

Podemos escribir el Principio de los Trabajos Virtuales de la siguiente manera:

$$\iint_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \iint_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \iint_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dA + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i \quad (3.3)$$

Nótese que es análogo a la expresión en elasticidad bidimensional. Así pues, queda definida la expresión matricial del PTV, donde $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ son las deformaciones virtuales, $\delta \mathbf{u}$ los desplazamientos virtuales, $\boldsymbol{\sigma}$ las tensiones, \mathbf{b} las fuerzas másicas de volumen, \mathbf{t} las de superficie, \mathbf{q}_i las puntuales.

3.1.2. Definición del modelo

A continuación, se detalla cómo se ha definido el modelo en *GiD*. Es decir, se muestra el *pre-proceso* de la figura.

3.1.2.1. Geometría

La geometría definida es análoga a la que se ha definido en el caso 2D. Las dimensiones de la presa, junto con los parámetros de inclinación de los paramentos (n, m) son las mismas que en el caso previo. En cuanto al terreno, se le ha dado una profundidad de 30 m y un desarrollo de 200 m, lo suficiente para observar las tensiones generadas en el terreno y en la presa. Se tiene que decir que el objetivo es comprobar la respuesta de la presa, con lo que las tensiones en el terreno son menos relevantes en este caso.

En las siguientes figuras (fig. 3.1), se muestra la geometría una vez definidos los volúmenes y las superficies que la conforman:

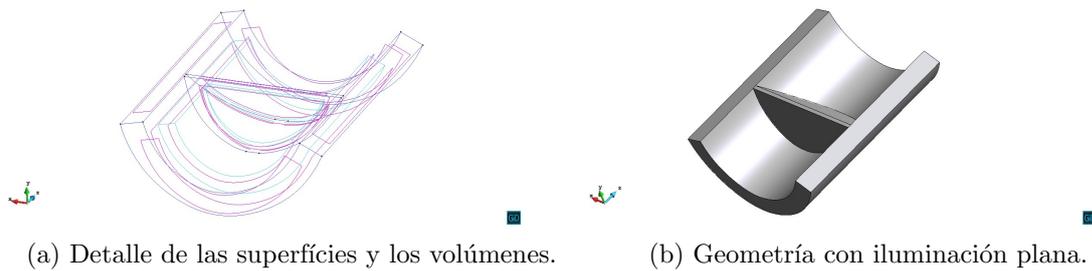


Figura 3.1: Geometría en el caso 3D.

3.1.2.2. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno también se han definido de forma análoga al caso 2D. En la superficie inferior del terreno, se han impuesto desplazamientos en las tres direcciones

del espacio nulas, mientras que en las superficies frontal y trasera que limitan el desarrollo del terreno se han impedido los desplazamientos en x .

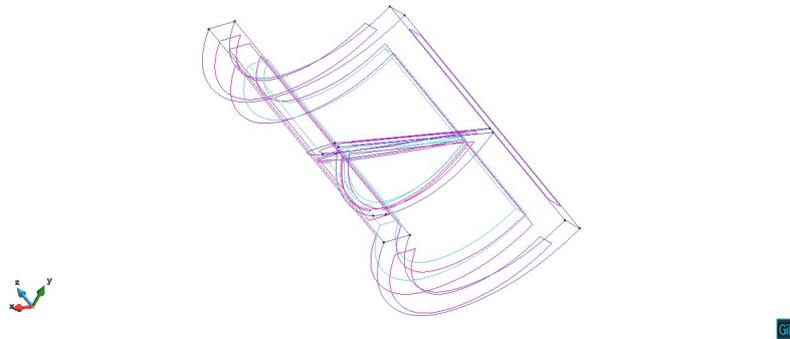


Figura 3.2: Condiciones de contorno en el caso 3D.

3.1.2.3. Propiedades de los materiales

Las propiedades de los materiales se han asignado como en el caso anterior:

$$\begin{aligned} \gamma_h &= 25000 \text{ N/m}^3 & \gamma_t &= 20000 \text{ N/m}^3 \\ \nu_h &= 0,2 & \nu_t &= 0,30 \\ E_h &= 2,2 \text{ GN/m}^2 & E_t &= 23,7 \text{ GN/m}^2 \end{aligned}$$

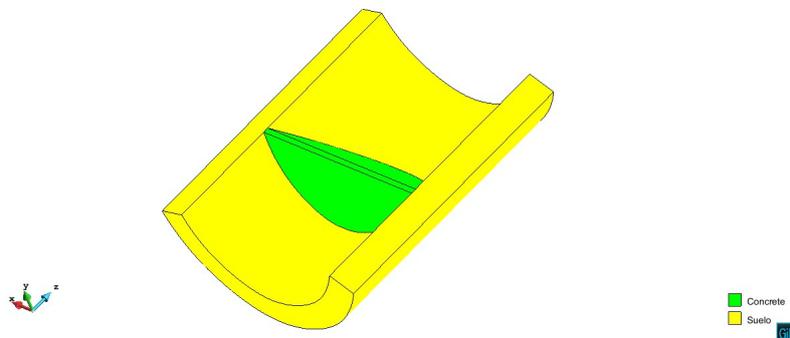


Figura 3.3: Materiales en el caso 3D.

3.1.2.4. Cargas aplicadas

Se han estudiado dos casos diferentes de cargas, uno en el cual solo consideramos el peso propio de la presa (*self-weight*) y otro en el cual consideramos tanto el peso propio como el empuje hidrostático sobre la estructura y sobre el terreno.

Para definir la carga hidrostática, sencillamente se ha asignado una carga hidrostática a las superficies aguas arriba de la presa y del terreno, como se muestra en la figura:

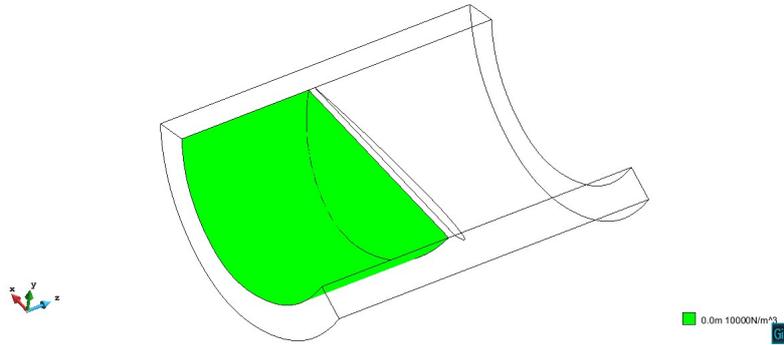


Figura 3.4: Carga hidrostática en el caso 3D.

3.1.2.5. Discretización en elementos finitos

La discretización en el caso 3D se ha realizado a través de elementos tetraédricos de 3 nodos, y al igual que se ha hecho anteriormente, se han asignado diferentes tamaños de malla a la presa y al terreno, pues la prioridad es obtener las tracciones en la presa. Un ejemplo de malla se muestra a continuación (fig. ??)

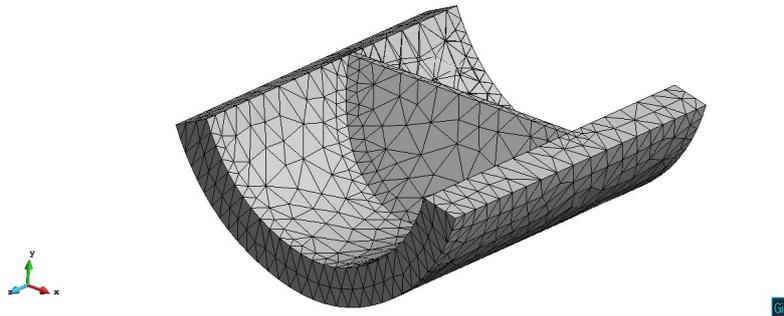


Figura 3.5: Ejemplo de malla en el caso 3D.

Con el objetivo de obtener una malla que sea suficientemente buena, se ha realizado un análisis de convergencia en desplazamientos, para asegurar que la discretización proporciona resultados fiables. A continuación, se presenta dicho diagrama (fig. 3.6):



Figura 3.6: Diagrama de convergencia en desplazamientos en el eje y para elementos tetraédricos de 3 nodos.

Como se puede ver, los desplazamientos acaban convergiendo. Así pues, se usará una malla de 2480 nodos, con un tamaño de 10 m para la presa y 20 m para el terreno, asegurando la fiabilidad de los resultados.

3.2. Resultados

A continuación, se presentan los resultados correspondientes a los dos casos de carga que se han considerado.

3.2.1. Presentación de resultados y post-proceso de la figura

3.2.1.1. Caso 1. Peso propio

En las siguientes figuras, se muestran los resultados de los desplazamientos:

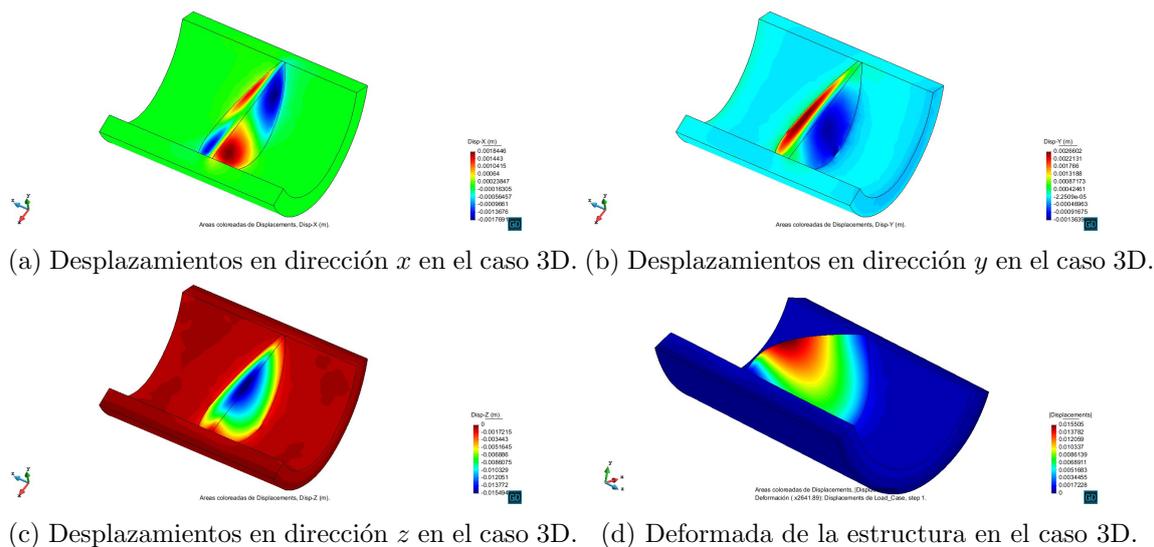


Figura 3.7: Desplazamientos en el caso 3D.

Finalmente, las tensiones máximas:

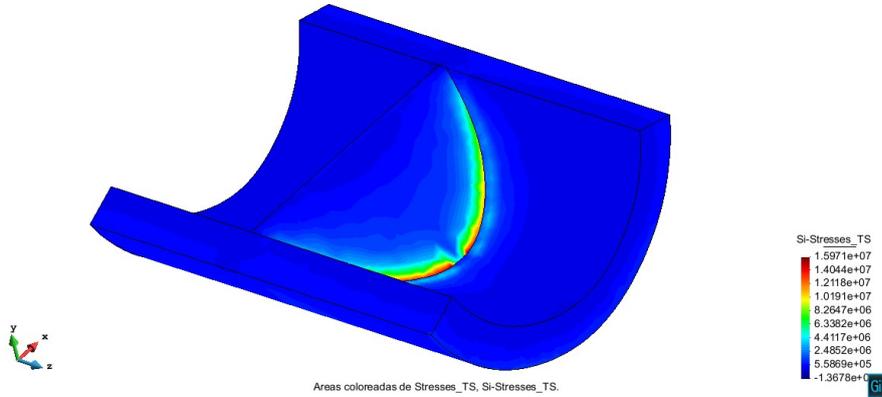
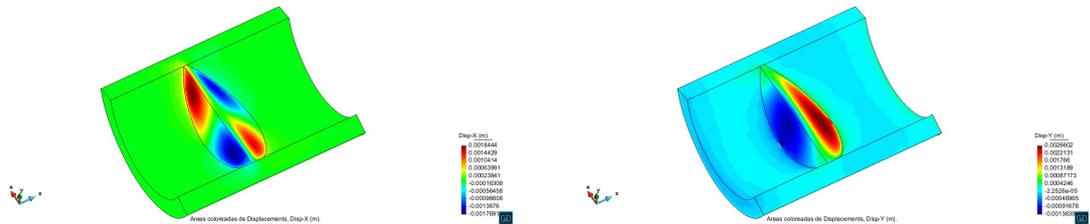


Figura 3.8: Tensiones principales máximas en el caso 3D.

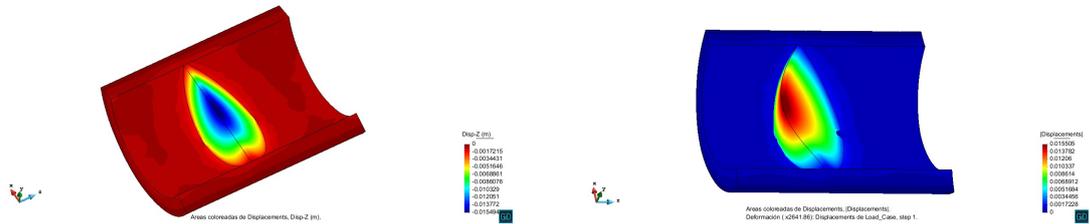
Obsérvese que la presa se halla principalmente a compresión, a excepción de las zonas que en el capítulo anterior se han comentado, donde por la geometría se concentran tensiones cuyos valores se disparan pero no son representativos de la respuesta estructural de la presa.

3.2.1.2. Caso 2. Presión hidrostática y peso propio

Los resultados de los desplazamientos, como en el caso anterior, se presentan a continuación, junto con las tensiones en la presa:



(a) Desplazamientos en dirección x en el caso 3D (presión hidrostática). (b) Desplazamientos en dirección y en el caso 3D (presión hidrostática).



(c) Desplazamientos en dirección z en el caso 3D (presión hidrostática). (d) Deformada de la estructura en el caso 3D (presión hidrostática).

Figura 3.9: Desplazamientos en el caso 3D (presión hidrostática).

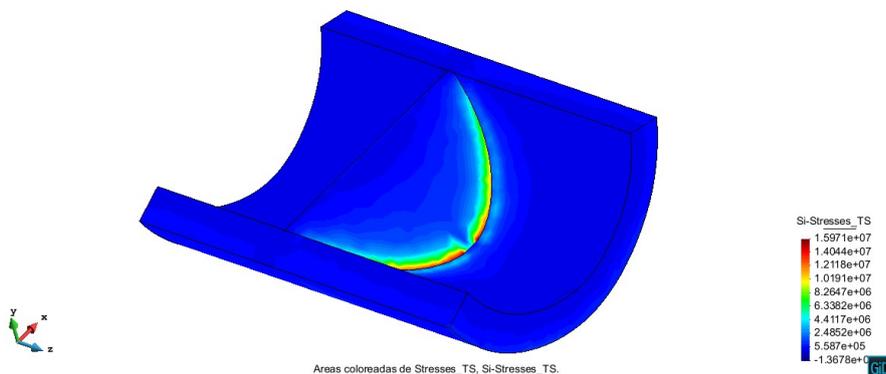


Figura 3.10: Tensiones principales máximas en el caso 3D (presión hidrostática).

Nos encontramos ante unos resultados análogos al caso 2D. Otra vez tenemos las tensiones concentradas en las zonas donde hay cambios abruptos en la geometría que no son representativas. Por otro lado, se puede ver como la mayor parte de la presa trabaja a compresión.

3.2.2. Detección de problemas y posibles alternativas y modificaciones

Los problemas que nos presenta este caso tridimensional vuelven a ser los mismos que nos encontramos en el caso bidimensional, que por culpa de los cambios abruptos en la geometría (esquinas) tenemos tracciones concentradas cuyos valores se disparan y no nos resultan útiles a la hora de estudiar el comportamiento de la estructura.

Posibles soluciones que se podrían plantear serían suavizar la geometría, o refinar la malla en dichas zonas. Aún así, se debe decir que en el caso tridimensional a la hora de refinar la malla tenemos un poco más de limitación que en el caso anterior, pues tenemos más nodos y por tanto los cálculos se complican y la simulación tarda más tiempo en ejecutarse y obtener los resultados.

3.3. Conclusiones caso tridimensional

En este capítulo, se ha comprobado en tres dimensiones que el dimensionamiento de la presa que se ha obtenido en el caso bidimensional no presenta problemas. La presa trabaja como se esperaba, principalmente a compresión, y los desplazamientos máximos se observan en coronación. Por parte del terreno, que no es realmente objeto de nuestro estudio, se observan leves asentamientos que se deberían controlar pues podrían generar problemas a largo plazo.

Capítulo 4

Conclusiones finales

Finalmente, después de haber estudiado los dos casos, bidimensional y tridimensional, se pueden extraer conclusiones a nivel global.

La primera de ellas es que como se ha comprobado, los resultados en el caso bidimensional, estudiando el problema como un caso de deformación plana, proporcionan una primera aproximación bastante precisa (teniendo en cuenta la simplicidad del modelo) de la respuesta estructural de la presa.

En segundo lugar, en referencia al modelo que se ha definido, hay que comentar que ha presentado algunos problemas que dificultan el análisis. El primero y más claro de ellos han sido las concentraciones de tensiones que no representan el funcionamiento real de la estructura, pues son debidos a la discretización de la figura. Dichos problemas se pueden solventar o bien suavizando la geometría, o bien refinando la malla, aunque como se ha comentado anteriormente, refinar la malla en dichas zonas en el caso tridimensional puede llevar a que los cálculos sean muchos más costosos, pues el número de grados de libertad del sistema aumenta notablemente y con ello el tiempo de cálculo.

En resumen, se puede decir que el estudio del comportamiento se ha podido llevar a cabo satisfactoriamente aunque el modelo sea relativamente simple. Combinando unas hipótesis físicas razonables con una discretización suficientemente precisa, los resultados son fiables.

Bibliografía

- [1] Oñate, E., *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos*, 2a Edición, CIMNE, Barcelona 1995.
- [2] *GiD. El pre-post procesador personal*. CIMNE, Barcelona, www.gid.cimne.upc.es, 2002.