



TRABAJO FINAL
INGENIERIA DE ESTRUCTURAS

PABLO LLOPIS OLCINA

Junio 2015

INDICE

OBJETIVOS.....	1
PROBLEMA S-2.....	3
Pasos a seguir.....	4
Base teórica implementada.....	4
Deformación plana.....	4
Campo de desplazamientos.....	4
Campo de deformaciones.....	5
Campo de tensiones.....	5
Tensiones y deformaciones.....	5
Medición de los efectos térmicos.....	6
PTV en elasticidad 2D.....	6
Preproceso análisis bidimensional.....	7
Datos de análisis.....	7
Geometría.....	7
Condiciones de contorno.....	8
Definición del material.....	8
Cargas.....	8
Análisis de convergencia.....	9
Proceso.....	11
Post-proceso.....	11
Análisis bidimensional.....	11
Preproceso análisis	
tridimensional.....	13
Geometría.....	13
Condiciones de contorno.....	13
Cargas.....	14
Análisis de convergencia del modelo 3D.....	14
Post-proceso.....	16
Esfuerzos en elementos de presa.....	16
PROBLEMA L-35.....	21
Pasos a seguir.....	22
Base teórica implementada.....	22
Campo de movimientos.....	23
Vector de deformaciones.....	23
Tensiones locales.....	24
Esfuerzos locales.....	25
Preproceso.....	26
Datos de análisis.....	26
Geometría.....	26
Condiciones de contorno.....	27
Definición del material.....	28
Cargas.....	28
Análisis de convergencia.....	28
Proceso.....	30
Post-proceso.....	30

OBJETIVOS

El principal objetivo de este trabajo, es la puesta en practica de los conocimientos obtenidos en la asignatura de Ingeniería de estructuras, mediante la utilización del Método de los Elementos Finitos.

Objetivos específicos

- Analizar el estado tensional de las diferentes estructuras que nos podemos encontrar en la ingeniería civil.
- En el primer ejercicio diseñaremos y dimensionaremos una presa en tierra armada, en la cual la limitación serán las dimensiones geométricas y las tensiones desarrolladas en el interior de la presa.
- En el segundo ejercicio, se diseñara una torre de enfriamiento de concreto, en que la limitación serán las tensiones.

PROBLEMA S-2

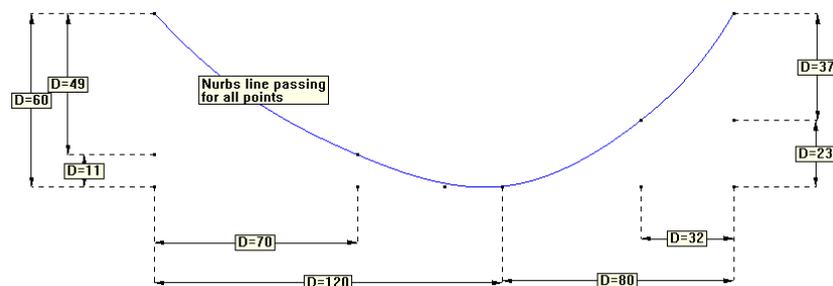
Enunciado

Dimensionar y calcular una presa homogénea de materiales sueltos de 60 m de altura. La anchura en coronación debe ser de 6 m. con las restricciones geométricas que se indican.

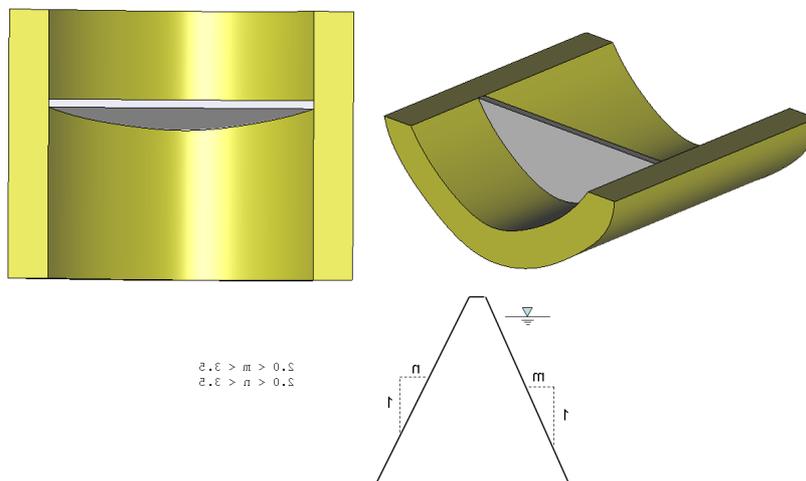
Realizar el proyecto mediante un análisis bidimensional y posteriormente en 3D para verificar el diseño utilizando en ambos casos las siguientes hipótesis:

- 1) Las tracciones máximas en cualquier punto de la presa no deben superar 1 MPa
- 2) El peso específico del terreno y el material de construcción es de 20000 N/m³
- 3) El Modulo de elasticidad del material a usar es de 9900 K N/m² y el coeficiente de Poisson es de 0,285
- 4) Base empotrada en el terreno
- 5) Cimentación en terreno homogéneo. Modulo de elasticidad: 35 G N/m² y coeficiente de Poisson 0,30.
- 6) Cargas actuantes:
 - a) Peso propio
 - b) Peso propio + empuje hidrostático en presa y cimentación (altura del agua 58 metros)

El perfil del emplazamiento es el que se muestra:



La sección de terreno tiene un ancho de 30 metros y un desarrollo de 400 metros.



PASOS A SEGUIR

Según el enunciado, se tienen que realizar dos modelos diferentes de estudio para la presa:

- El primer caso, se estudiara con una geometría de la presa de forma bidimensional, utilizando la deformación plana de los elementos finitos. De esta forma, se realizaran en la primera parte del ejercicio el estado bidimensional de forma paralela para las dos condiciones de carga dadas para el problema.
- Una vez identificadas las variables solicitadas en el ejercicio, se procederá a la realización de un modelo 3D, que serán comparados con los resultados obtenidos con la simulación bidimensional, para los dos estados de carga.

Para realizar estos casos se utilizara el programa computacional "RamSeries Professional"

BASE TORICA IMPLEMENTADA

En este ejercicio la teoría implementada es la de deformación plana, la cual plantea lo siguiente:

Deformación plana

Esta se produce cuando una de sus dimensiones (longitud) es mucho mayor que las otras dos, y sobre ella actúan únicamente cargas uniformemente distribuidas a lo largo de su longitud y contenidas en planos ortogonales al eje que une los centros de gravedad de sus distintas secciones transversales. Por ejemplo, muros de contención, presas de gravedad, tuberías bajo presión interior, túneles, tensiones bajo zapata.

En este caso las deformaciones no están permitidas en la dirección del eje Z. La matriz de deformación se ve reducida.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$$

Campo de desplazamientos

Se supone que las secciones perpendiculares al eje prismático Z se deforman en su plano y de manera idéntica, por lo tanto:

Donde $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son los desplazamientos de un punto en las direcciones X e Y respectivamente.

$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$

Campo de deformaciones

Del campo de desplazamiento se deducen las deformaciones utilizando la teoría clásica de elasticidad.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Con la deformación longitudinal ε_z , en el caso de deformación plana se hace la hipótesis de que es nula. Por otra parte, en tensión plana dicha deformación no es nula, pero se supone que las tensiones σ_z si son nulas. En ningún caso se considera deformación ε_z . El vector de deformaciones significativas de un punto se define para tensión y deformación plana como:

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}]^T$$

Campo de tensiones

Las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} son nulas y la tensión σ_z no trabaja, por lo tanto el vector de tensiones es:

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$$

Tensiones y deformaciones

La relación matricial entre tensiones y deformaciones se expresa como:

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon$$

La matriz D es la matriz de propiedades mecánicas o CONSTITUTIVA se escribe:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

Para deformación plana con $\varepsilon_z=0$ los términos d_{ij} de la matriz constitutiva se expresan mediante la formula:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ &= d_{22} \\ d_{12} &= d_{21} = \frac{\nu}{1-\nu} d_{11} \\ d_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G \end{aligned}$$

El caso general con tensiones y deformaciones iniciales se escribe:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{11} &= \mathbf{d}_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \\ \mathbf{d}_{12} &= \mathbf{d}_{21} = \nu \mathbf{d}_{11} \\ \mathbf{d}_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G \end{aligned}$$

Medición de los efectos térmicos

- En tensión plana

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- En deformación plana

$$\varepsilon^0 = (1+\nu) \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

PTV en elasticidad 2D

El principio de los trabajos virtuales para problemas de elasticidad se explica en dos partes.

El primer miembro representa el trabajo que realizan las tensiones σ_x, σ_y sobre las deformaciones virtuales " $\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y$ ".

El segundo miembro representa el trabajo de las fuerzas repartidas por unidad de volumen " b_x, b_y "; las fuerzas repartidas sobre el contorno " t_x, t_y "; y de las fuerzas puntuales " U_i, V_i " sobre los desplazamientos virtuales " $\delta u, \delta v$ ".

$$\int_A \delta \varepsilon^T \sigma \mathbf{t} \, dA = \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathbf{t} \, dA + \oint_I \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, ds + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{q}_i$$

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon &= [\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \gamma_{xy}]^T & \mathbf{q}_i &= [U_i, V_i]^T \\ \delta \mathbf{u} &= [\delta u, \delta v]^T & \delta \mathbf{u}_i &= [\delta u_i, \delta v_i]^T \\ \mathbf{b} &= [b_x, b_y]^T & \mathbf{t} &= [t_x, t_y]^T \end{aligned}$$

PREPROCESO ANALISIS BIDIMENSIONAL

Datos de análisis

Inicialmente se define el tipo de problema a resolver. Al tratarse de un problema de deformación plana, se especifica en el programa de calculo "RamSeries", tipo de simulación, dimensión de la simulación, tipo de análisis y tipo de elementos, así como los demás parámetros de análisis:

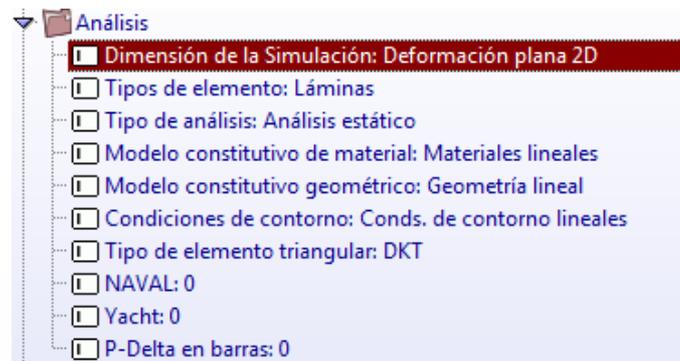


Imagen 1. Definición de tipo de análisis

Geometría

En el momento de definir la geometría, se realiza con la condición mas critica de la presa, la cual esta cargada con presión hidrostática, para así, realizar un análisis de convergencia que nos aporte un tipo y tamaño de malla adecuada para el problema. Para esto se introduce la geometría del modelo cargado trabajando como deformación plana, por lo tanto se define como plano de trabajo XY y la dirección z como dirección prismática para la presa.

Para introducir la geometría utilizamos puntos, líneas y superficies, con la relación de taludes izquierdo y derecho de 1:2 y 1:2 respectivamente, que es la condición inicial de menos peso para la presa.

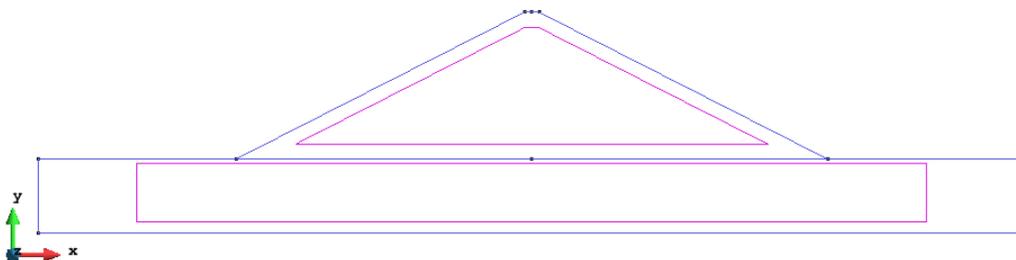


Imagen 2. Geometría con taludes izquierdo 1:2 y derecho 1:2

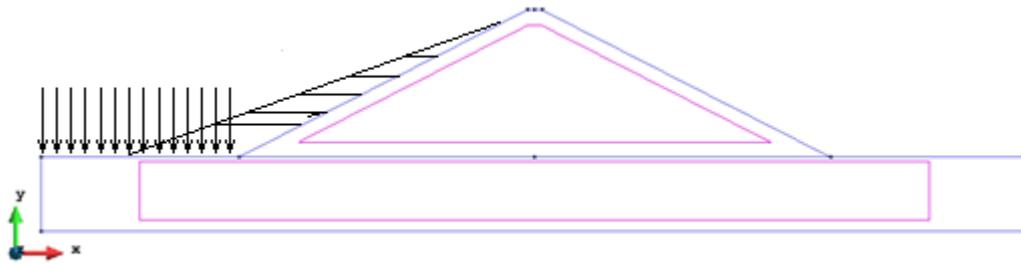


Imagen 5. Definición de cargas

Análisis de convergencia

Como en todos o la mayoría de problemas mediante Métodos Infinitos, debemos de realizar un análisis de convergencia para escoger el tamaño de malla óptima y así obtener resultados fiables, ya que no todas las mallas nos dan resultados óptimos.

Para realizar esto basta con tomar un punto aleatorio del modelo, y realizar un análisis de convergencia, en el que se presenten desplazamientos inducidos por las cargas actuantes, ya que los demás parámetros como esfuerzos y deformaciones dependen de la solución de la matriz global del sistema, específicamente del vector de desplazamientos, generando menos errores en la solución de los resultados.

En nuestro caso, se realizara el análisis de convergencia en el punto P1 con coordenadas (200,90,0), que se encuentra en la línea de corona en su punto medio.

Se estudiaron tres tipos de malla no estructuradas, con variación de tamaños de elementos. Se muestra el resultado del proceso en la tabla 1,

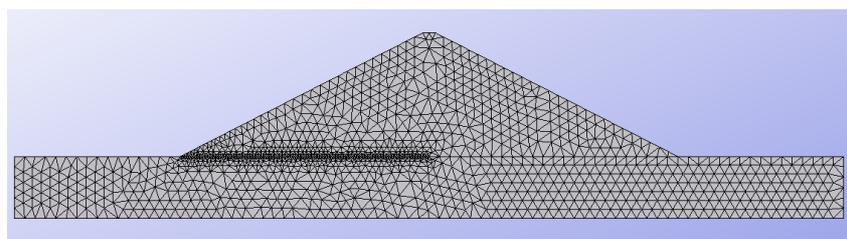


Imagen 6. Malla TR 3N

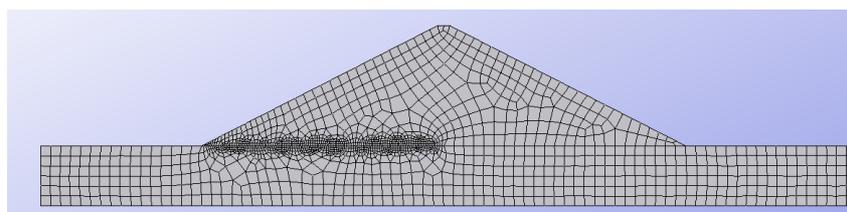


Imagen 7. Malla QU 4N

DESPLAZAMIENTO P3 VS NUMERO DE NODOS					
	5m	4m	3m	2m	1m
	ΔZ_a (m) / #Nodos				
TR 3N	-0.9922 977	-0.9939 1399	-0.9940 2542	-0.9935 5566	-0.9934 22189
TR 6N	-0.9932 5681	-0.9932 7273	-0.9933 11147	-0.9933 23070	N/C N/C
QU 4N	-0.9911 1695 2744	-0.99204 2008 3534	-0.99232 2481	-0.99243 3831 3694	-0.99275 18850 18653

Tabla 1. Tabla de resultados de convergencia

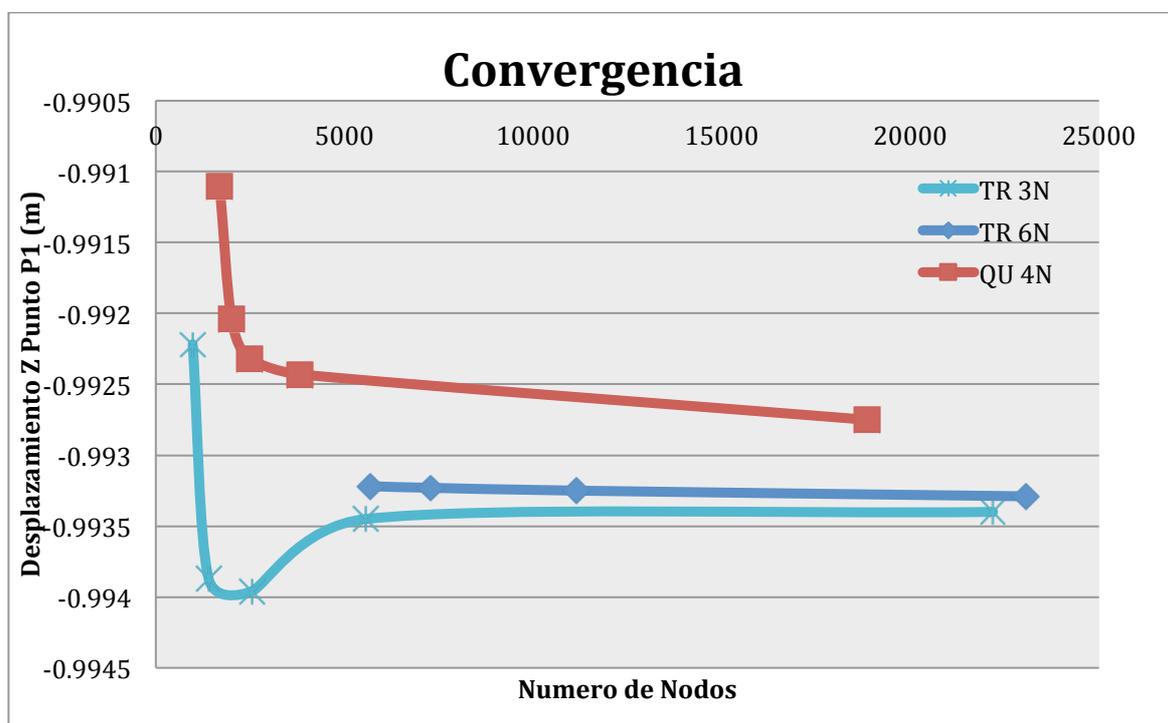


Grafico 1. Grafico de convergencia

Como se puede apreciar en la grafica 1, la malla de triángulos de 6N converge rápidamente al valor del desplazamiento en la dirección Z en el P1, llegando a obtener un valor de -0,9932, constante en sus tres primeros decimales. Por lo que la malla a escoger será de 2 metros, la cual nos ofrecerá resultados mas fiables.

PROCESO

Después de la asignación de la malla pasamos al proceso de calculo, parte que se realiza de forma automática por el programa "RamSeries Professional".

POSTPROCESO

Análisis bidimensional

Una vez conocidos los datos obtenidos en los apartados anteriores pasamos al calculo del predimensionamiento optimo de la presa, en el cual se cumplan las condiciones establecidas por el enunciado.

Para esto, se ira aumentando gradualmente las inclinaciones de los taludes, obteniendo con ello los esfuerzos principales para la cada inclinación, empezando por un talud mínimo de 1:2 en ambos lados e ir aumentándose 0,5 unidades hasta encontrar las tracciones optimas menores a 1 MPa. Se obtiene que,

Valores para m y n	Tracciones principales Presa cargada caso (a)	Tracciones principales Presa cargada caso (b)
	Tensión Si (MPa)	Tensión Si (MPa)
2	-523	0.954
2.5	x	1.19
3	x	x
3.5	x	x

Tabla 2. Análisis tentativo de pendiente de taludes

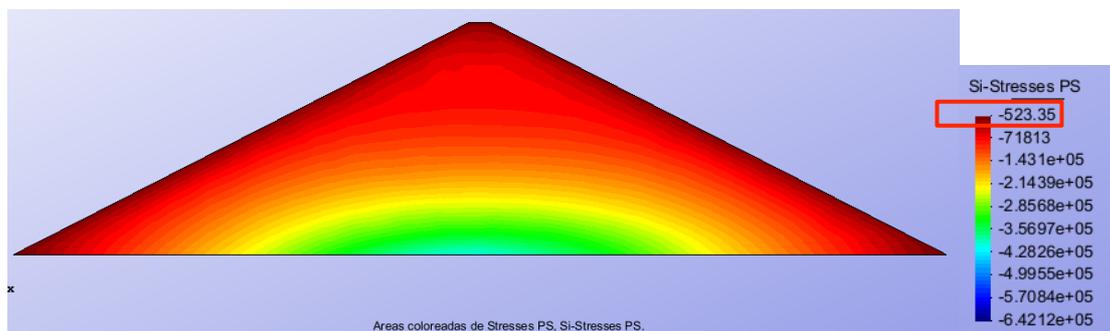


Imagen 8. Tensiones principales Si (MPa) de la presa caso (a) solo carga peso propio, y taludes 1:2

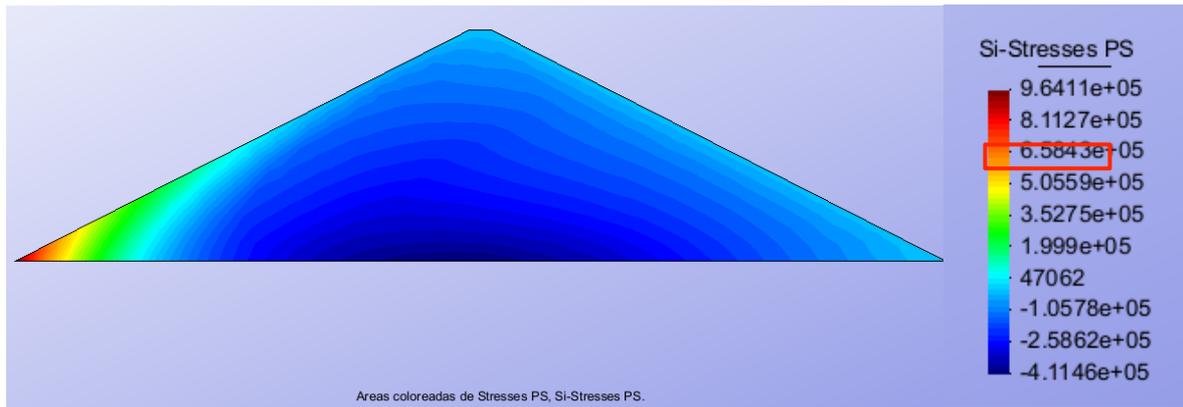


Imagen 9. Tensiones principales S_i (MPa) de la presa caso (b) con cargas hidrostáticas, y taludes 1:2

Para el caso (a), en el que la presa se somete a su peso propio, se puede ver en la imagen 8 que no existen tracciones, que solo existen compresiones, por lo que la inclinación óptima para el dimensionamiento de la presa ante su peso propio, es una relación 1:2.

En cuanto el caso (b), en el que se tiene en cuenta el peso propio de la presa, la carga hidrostática y el peso del suelo, se realiza la prueba con una inclinación 1:2, obteniendo valores menores a 1MPa. Se realiza la prueba para una inclinación 1:2,5 en la cual si que se sobrepasa el valor de 1MPa, por lo que también se obtiene que el valor óptimo de inclinación es 1:2.

Estos resultados se ven ratificados en el diagrama de esfuerzos a compresión de la presa, en los cuales para el caso (a) se presentan solo esfuerzos negativos de compresión.

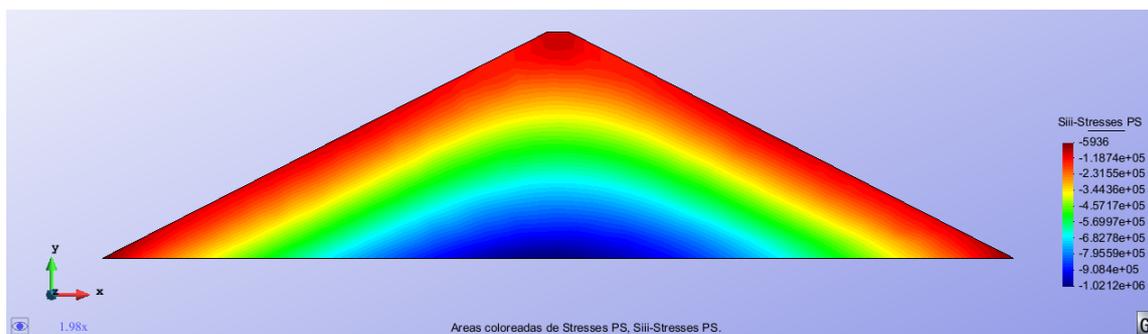


Imagen 10. Tensiones principales S_{iii} (MPa) de la presa caso (a) solo carga peso propio, y taludes 1:2

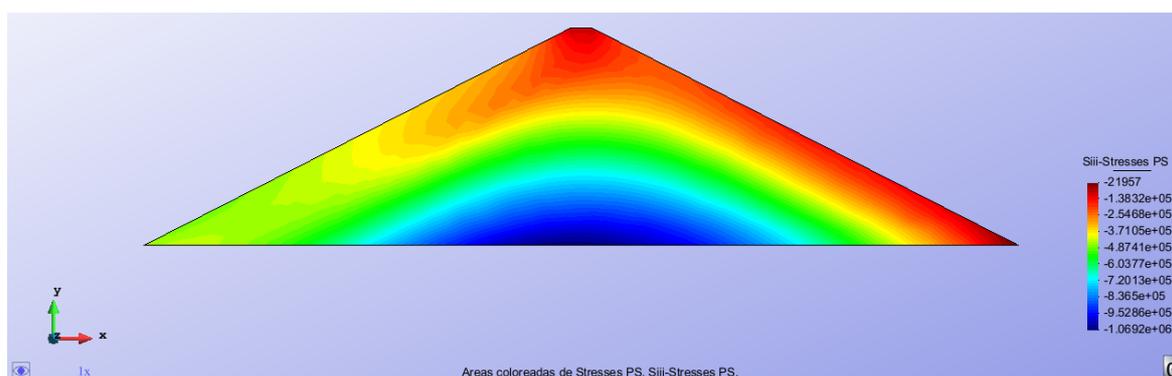


Imagen 11. Tensiones principales S_{iii} (MPa) de la presa caso (b) con cargas hidrostáticas, y taludes 1:2

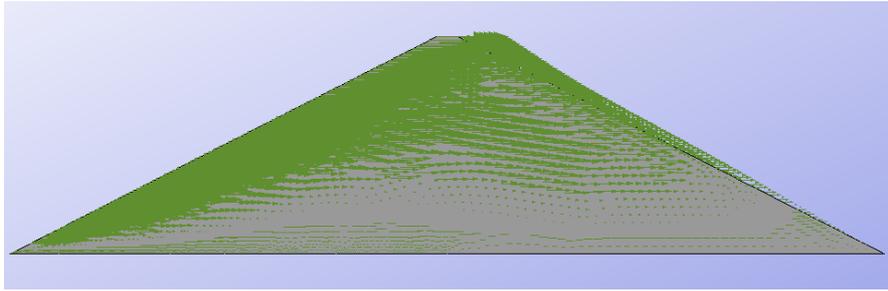


Imagen 12. Diagrama de vectores de desplazamientos en la dirección X, para caso b, con relación 1:2

PREPROCESO ANALISIS TRIDIMENSIONAL

Una vez realizado el análisis bidimensional, deberíamos realizar un modelo de análisis tridimensional.

Geometría

Introducimos la geometría de la presa dimensionada inicialmente creando una nueva geometría, utilizando herramientas de dibujo y realizando cortes de superficie

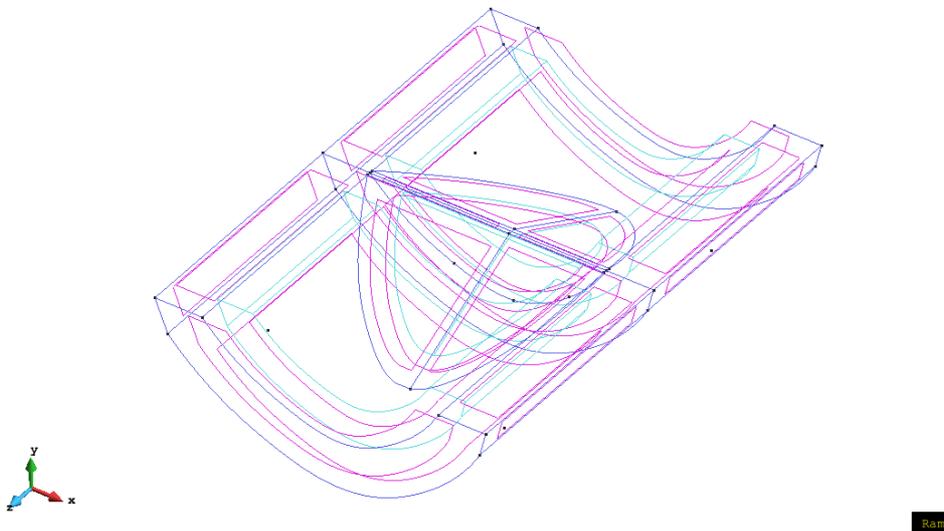


Imagen 13. Geometría de la presa, modelo 3D

Condiciones de contorno

Se aplicaran las condiciones de contorno del modelo 3D, diferenciándose del modelo bidimensional en que en este cas, se restringen los movimientos de la superficie de la base del suelo.

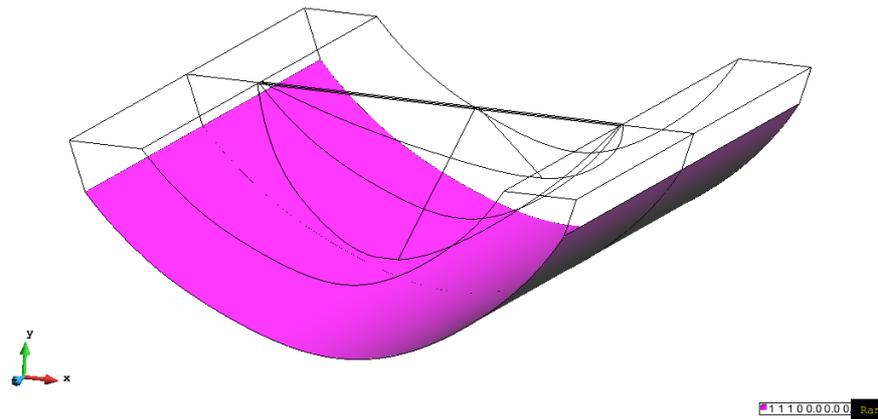


Imagen 14. Definición de las condiciones de contorno

Cargas

Introducimos las cargas al modelo, tanto las cargas por peso propio como las presiones hidrostáticas, a la presa y al mismo suelo tal como en el modelo bidimensional,

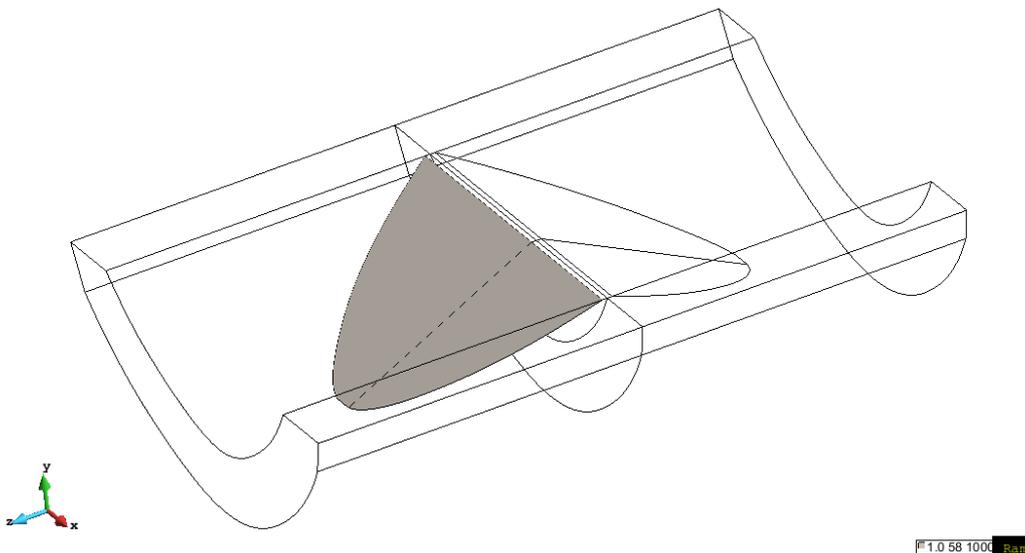


Imagen 15. Definición de las cargas

Análisis de convergencia de modelo 3D

Como ya hemos hecho en el apartado anterior, necesitamos hacer un estudio de convergencia para obtener una malla óptima que nos aporte resultados fiables, ya que nos todas las mallas nos los aportaran. Realizaremos un análisis de convergencia en un punto aleatorio del modelo, uno que presente desplazamientos inducidos por las cargas actuantes, ya que los demás parámetros como esfuerzos y deformaciones dependen de la solución de la matriz global del sistema, específicamente del vector de desplazamientos, lo que generara menos errores en la solución de los resultados.

Para nuestro caso hemos utilizado el mismo punto que en el apartado bidimensional, el P1 (0,60,0) ubicado en la parte superior de la presa y en la mitad de la línea de la corona.

En análisis estudiamos tres tipos diferentes de mallas no estructuradas, en el cual varia el tamaño de los elementos, con los siguientes resultados,

DESPLAZAMIENTO P1 VS NUMERO DE NODOS					
	10m	9m	8m	7m	6m
	ΔZ_a (m) / #Nodos				
Tetraedros Lineal	-1.1673 13208	-1.1693 17379	-1.1694 23957	-1.1688 34438	-1.1687 53119
Tetraedros Cuadrat	-1.1967 93154	-1.1965 124164	N/C 173027	N/C N/C	N/C N/C

Tabla 3. Análisis de convergencia para el elemento tridimensional

A continuación se observan los dos tipos diferentes de mallas utilizados, tetraedros lineales y tetraedros cuadráticos.

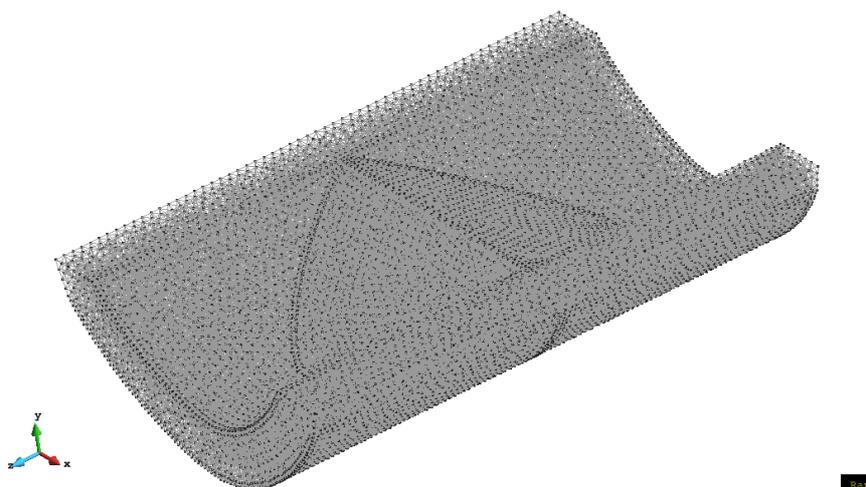


Imagen 16. Malla de Tetraedros lineal.

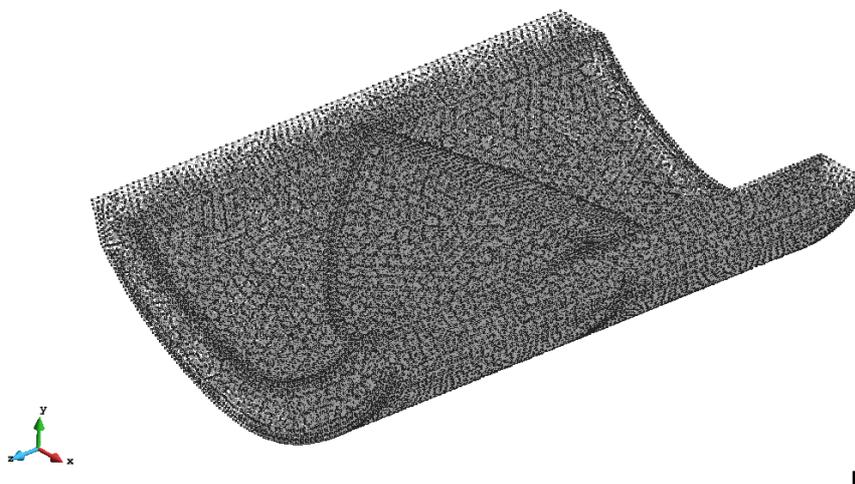


Imagen 17. Malla de Tetraedros cuadráticos

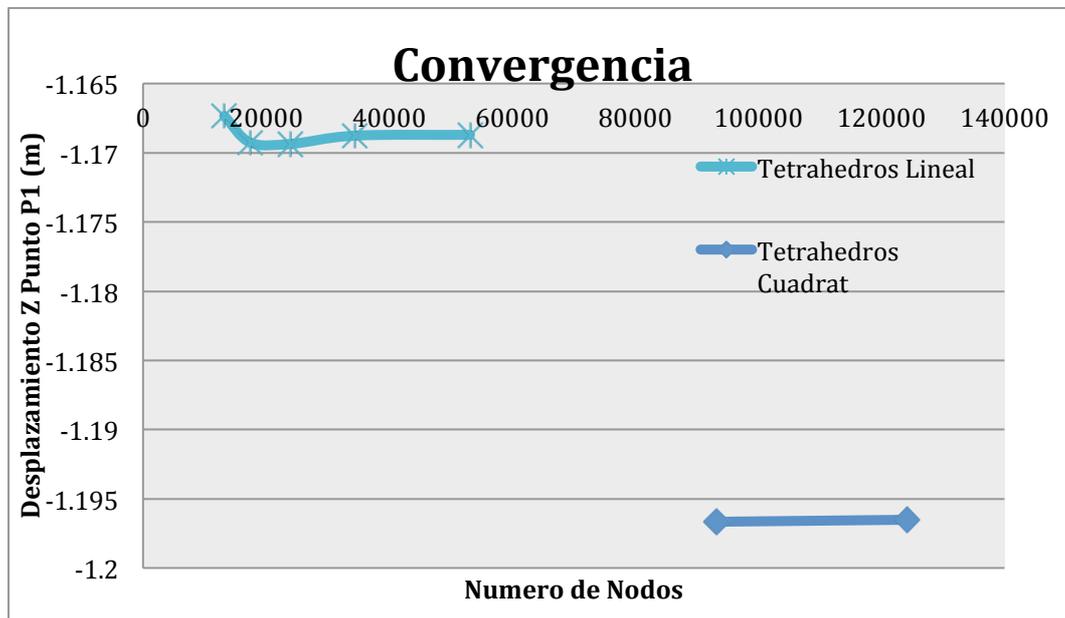


Grafico 2. Grafico de convergencia para el elemento tridimensional

Como se puede apreciar en el grafico, se aprecia que los mallados con tetraedros tienen un buen comportamiento. En cuanto a los elementos cuadráticos, solo se nos permitió usar una malla de tamaño inferior a 18 por la gran demanda del procesador.

También se puede apreciar que los desplazamientos obtenidos son muy mayores a los obtenidos en el apartado anterior, siendo 1,168 metros para los tetraedros lineales, lo cual podemos considerar un desplazamiento importante.

Por todo esto, el mallado que utilizaremos será de tetraedros lineales, con un tamaño de malla de 6 metros.

POSTPROCESO

Esfuerzos en elementos de presa

Una vez realizado el análisis de convergencia, se pasara a determinar los esfuerzos en la presa debidos a las fuerzas hidrostáticas

Valores para m y n	Esfuerzos principales Presa cargada caso a	Esfuerzos principales Presa cargada caso b
	Tensión Si (MPa)	Tensión Si (MPa)
2	810	5170

Tabla 4. Tabla de esfuerzos según modelo 3D

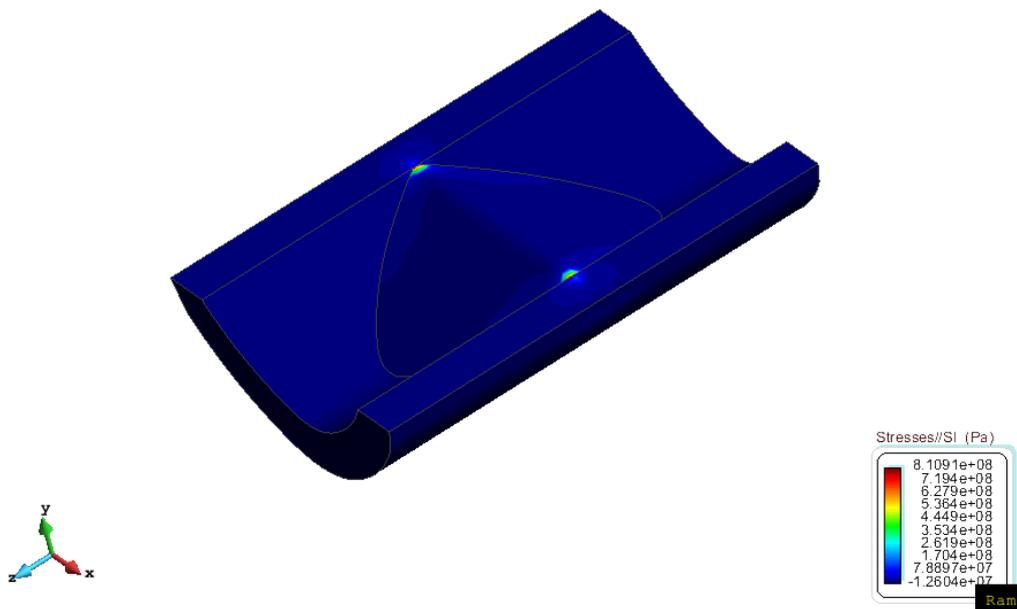


Imagen 18. Tracciones principales S_i (MPa) de la presa caso (a) solo carga peso propio, y taludes 1:2

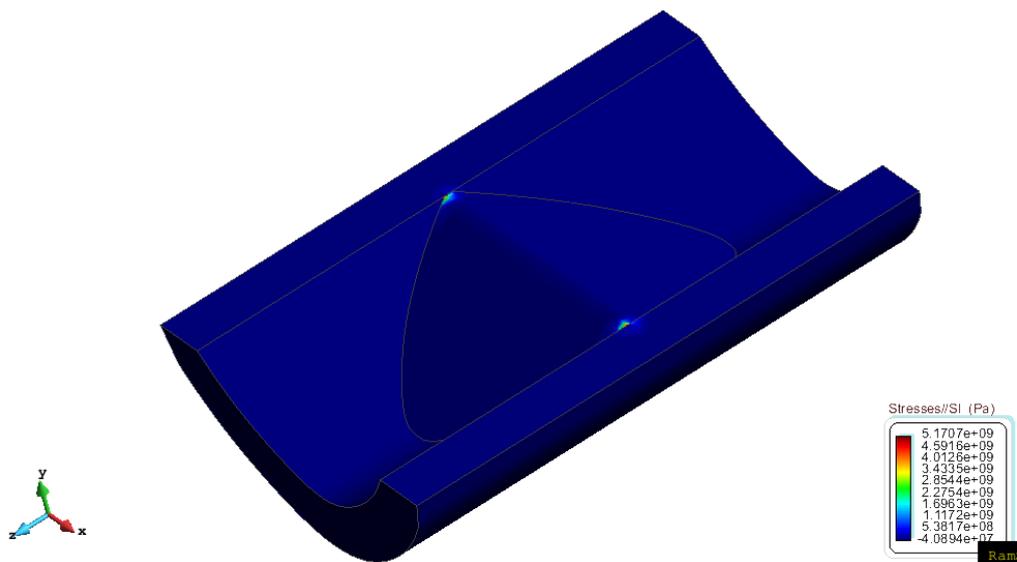


Imagen 19. Tracciones principales S_i (MPa) de la presa caso (b) con cargas hidrostáticas, y taludes 1:2

Como podemos apreciar, en los valores S_i (tensiones principales a tracción), se ven valores súper elevados, esto se debe a algunos errores que podemos encontrar en la teoría MEF, los cuales podrían ser por una mala discretización o errores en el calculo en la manipulación del software.

Como se aprecia en las imágenes 18 y 19, las tensiones principales se acumulan en la corona de la presa, donde se producen los mayores desplazamientos, esto puede ser por la configuración de la geometría establecida en el problema, lo cual no puede ser detectado en el caso bidimensional, ya que se asume una deformación $\epsilon_z=0$.

Otra posible causa sería, podría ser el elevado error de computo, ya que cuando el proceso se demora para el calculo de una gran cantidad de puntos, podrían producirse errores de calculo internos.

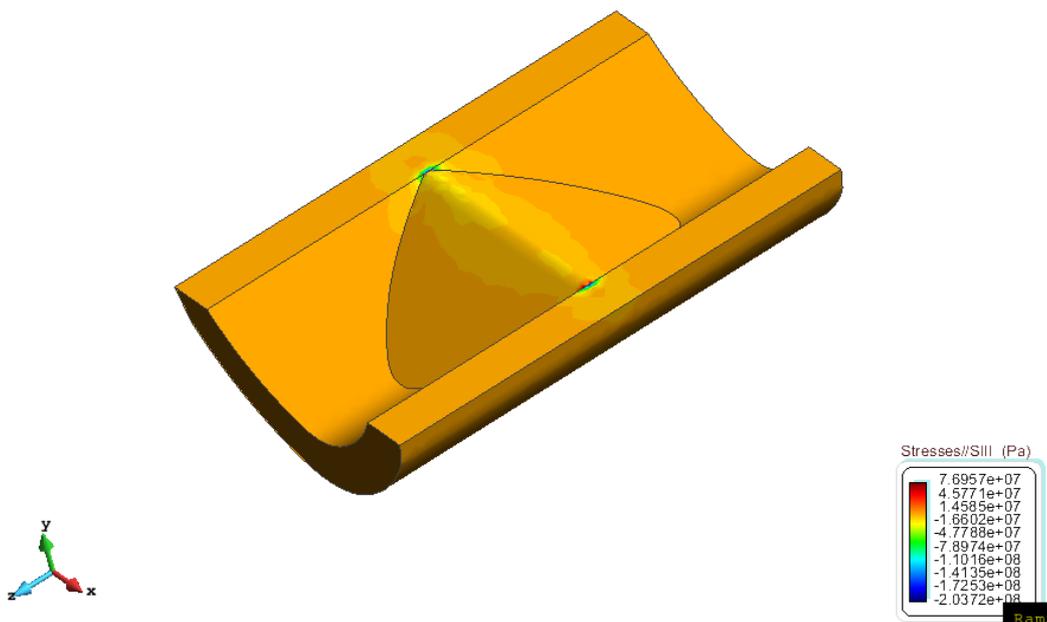


Imagen 20. Tracciones principales S_{iii} (MPa) de la presa caso (a) solo carga peso propio, y taludes 1:2

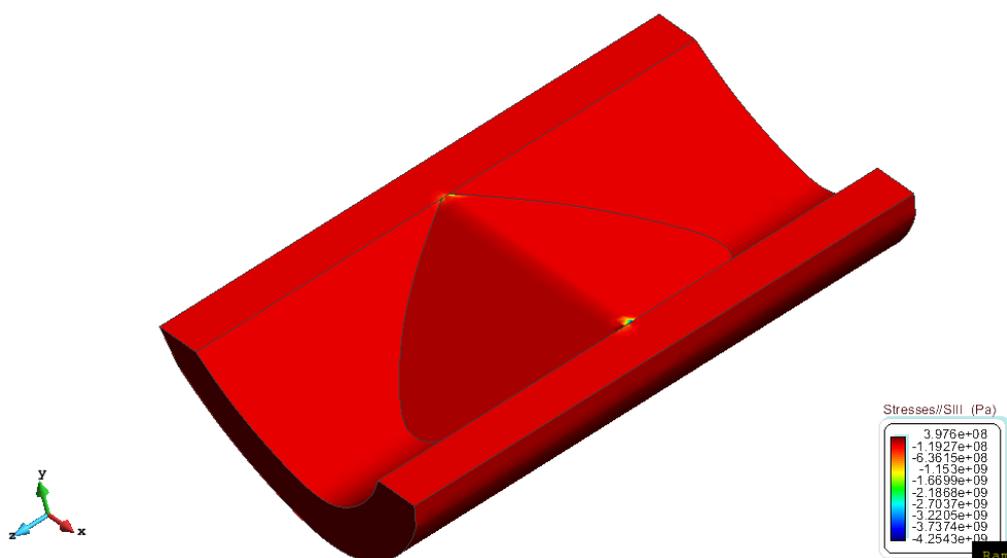


Imagen 21. Tensiones principales S_{iii} (MPa) de la presa caso (b) con cargas hidrostáticas, y taludes 1:2

Para concluir ,y haciendo una comparación de los dos métodos utilizados, se podría decir que la relación de talud optima para el control de esfuerzos en la presa, seria la de 1:2. Con el método de análisis bidimensional, tenemos un análisis mas preciso y ligero a la hora de hacer los cálculos de presas de gran tamaño, lo que nos permite no tener que utilizar sistemas tan potentes como podrían ser necesarios en los análisis tridimensionales.

PROBLEMA L-35

Enunciado

La ilustración 1, representa una torre de enfriamiento formada por una lámina de hormigón armado. Calcular el espesor mínimo de la torre capaz de soportar el peso propio de la estructura con las restricciones que se indican.

- 1) Las tracciones máximas en cualquier punto de la de estructura no deben superar los 40 MPa
- 2) Las compresiones máximas en cualquier punto de la estructura no deben superar los 60 MPa
- 3) Las propiedades mecánicas del hormigón son: $E = 19.8 \text{ KN/mm}^2$ $\nu = 0.18$
- 4) El apoyo proporcionado por las columnas se puede suponer como simplemente apoyado.

Cargas actuantes:

- a) Peso propio

Las dimensiones de la torre en m:

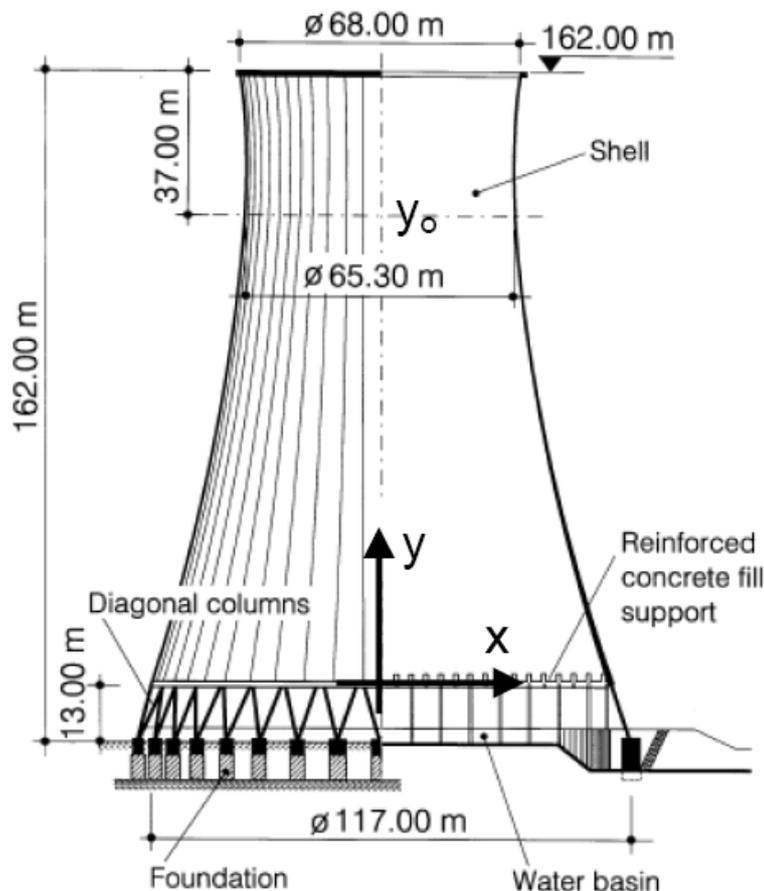


Imagen 1. Diagrama de Cuerpo rígido Torre de Enfriamiento.

PASOS A SEGUIR

Gracias a la gran variedad de métodos de cálculo mediante los elementos infinitos, podremos realizar el ejercicio de varias formas, dando todas ellas resultados muy similares o iguales.

Para este ejercicio tendremos varias alternativas, todas ellas aplicando láminas de revolución, ya que este cumple con los 4 requerimientos para la solución por este tipo de metodología. Estas 4 condiciones son,

- La geometría del elemento debe ser siempre de revolución.
- Las propiedades de los materiales deben poder ser recreadas por revolución.
- Las condiciones de contorno deben ser siempre de revolución.
- Las cargas deben ser siempre de revolución.

Por lo que, podemos afirmar que el problema se podrá realizar con métodos de elementos finitos tipo **LAMINAS DE REVOLUCIÓN**.

Una de las posibles formas de solucionarlo sería mediante el modelo con elementos troncocónicos, la cual sería una manera rápida y sencilla de obtener los resultados. Otra forma podría ser, mediante la creación de parte de la geometría de revolución y resolviendo el problema por geometría, restringiendo las condiciones de contorno del elemento. Por último, también se podría analizar mediante la geometría completa.

En nuestro caso, se ha decidido por optar por la segunda opción, modelando solo un cuarto de la geometría de revolución, para así poder visualizar mejor el comportamiento de la estructura, y no gastar mucho tiempo en cálculos en comparación con la geometría completa, ya que además, se empezó por el estudio de la geometría completa, pero las mallas estudiadas nunca convergieron, y el proceso se cancelaba cuando se sumaban demasiados puntos de análisis de convergencia.

BASE TEÓRICA IMPLEMENTADA

Para la realización de este problema se utiliza la metodología de sólidos de revolución MEF, la cual es una simplificación de la teoría 3D donde se consideran 2 desplazamientos y un giro. La utilización de esta hipótesis implica que,

- Las cargas son de revolución y hay simetría de revolución.
- El espesor de la lámina no cambia con la deformación.
- La tensión en la dirección normal a la generatriz σ_z' es nula.
- Las normales a la generatriz antes de la deformación permanecen rectas, pero no necesariamente normales a la generatriz después de la deformación.

Esta última hipótesis, sobre la ortogonalidad de la normal, es idéntica a la establecida en las teorías de Timoshenko y de flexión de placas y láminas de Reissner-Mindlin.

Para el desarrollo de esta metodología, es necesario conocer las diferentes características que nos pueden ayudar a conseguir una mejor interpretación de los resultados obtenidos, es decir las pautas y notaciones utilizadas para la teoría de revolución.

Campo de movimientos

El cambio de desplazamiento está regido por los siguientes vectores,

- El vector de movimientos locales es,

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u'_o \\ w'_o \\ \theta \end{pmatrix}$$

- El vector de movimientos globales es,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_o \\ w_o \\ \theta \end{pmatrix}$$

La matriz de transformación de movimientos locales es,

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u'_o \\ w'_o \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sen\phi & 0 \\ -\sen\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_o \\ w_o \\ \theta \end{pmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}$$

Vector de deformaciones

Como las tensiones tangenciales en xy e yz son nulas y con un valor de C_r que no se aproxime a la unidad, obtenemos el vector de deformaciones como sigue,

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{\phi} \\ \gamma_{x'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'_o}{\partial s} - \frac{w'_o}{R} - z' \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ \frac{u'_o \cos\phi - w'_o \sen\phi - z' \theta \cos\phi}{x} \\ \frac{\partial w'_o}{\partial s} + \frac{w'_o}{R} - \theta \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{x'}$ deformación radial

ε_{ϕ} deformación circunferencial

$\gamma_{x'z'}$ deformación tangencial

Y el vector de deformaciones locales se escribe,

$$\epsilon' = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'_o}{\partial s} - \frac{w'_o}{R} \\ \frac{u'_o \cos\phi - w'_o \sin\phi}{x} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z' \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ -z' \frac{\theta \cos\phi}{x} \\ \dots \\ \frac{\partial w'_o}{\partial s} + \frac{w'_o}{R} - \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}'_m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z' \hat{\epsilon}'_f \\ \hat{\epsilon}'_c \end{pmatrix}$$

Deformaciones generalizadas de membrana

Deformaciones generalizadas de flexión

$$\hat{\epsilon}'_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'_o}{\partial s} - \frac{w'_o}{R} \\ \frac{u'_o \cos\phi - w'_o \sin\phi}{x} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\epsilon}'_f = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \theta}{\partial s} \\ -\frac{\theta \cos\phi}{x} \end{pmatrix}$$

Deformaciones generalizadas de cortante

$$\hat{\epsilon}'_c = \left\{ \frac{\partial w'_o}{\partial s} + \frac{w'_o}{R} - \theta \right\}$$

Las componentes de $\hat{\epsilon}'_m$ pueden interpretarse como los alargamientos según direcciones radial y circunferencial. Las de $\hat{\epsilon}'_f$ como las "curvaturas" en esas dos mismas direcciones y $\hat{\epsilon}'_c$ representa la "deformación" de cortante transversal.

Tensiones locales

El vector de tensiones locales se define por,

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{\phi} \\ \dots \\ \tau_{x'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma'_m \\ \dots \\ \sigma'_c \end{pmatrix}$$

Donde $\sigma_{x'}$, σ_{ϕ} y $\tau_{x'z'}$ son las tensiones radial, circunferencial y tangencial respectivamente.

La relación entre tensiones y deformaciones se obtiene modificando la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional. Haciendo esto se obtiene, para una lámina de material isótropo,

$$\sigma' = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \epsilon' = \begin{bmatrix} D'_m & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & D'_c \end{bmatrix} \epsilon'$$

con

$$D'_m = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D'_c = \frac{\alpha E}{2(1+\nu)}$$

Esfuerzos locales

El vector de esfuerzos locales se define como,

$$\hat{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}'_m \\ \dots \\ \hat{\sigma}'_f \\ \dots \\ \hat{\sigma}'_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ N_{\phi} \\ \dots \\ M_{x'} \\ M_{\phi} \\ \dots \\ Q_{z'} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{\phi} \\ \dots \\ z' \sigma_{x'} \\ z' \sigma_{\phi} \\ \dots \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} dz' = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma'_m \\ \dots \\ z' \sigma'_m \\ \dots \\ \sigma'_c \end{Bmatrix} dz'$$

Siendo

$$\hat{\sigma}'_m = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ N_{\phi} \end{Bmatrix} ; \quad \hat{\sigma}'_f = \begin{Bmatrix} M_{x'} \\ M_{\phi} \end{Bmatrix} ; \quad \hat{\sigma}'_c = \{ Q_{z'} \}$$

Relación entre los esfuerzos y deformaciones generalizadas locales queda la expresión,

$$\hat{\sigma}' = \hat{D}' \hat{\epsilon}'$$

El vector de deformaciones generalizadas es,

$$\hat{\epsilon}' = \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon}'_m \\ \hat{\epsilon}'_f \\ \hat{\epsilon}'_c \end{Bmatrix}$$

La matriz constitutiva generalizada es:

$$\hat{D}' = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} D'_m & z' D'_m & 0 \\ z' D'_m & (z')^2 D'_m & 0 \\ 0 & 0 & D'_c \end{bmatrix} dz' = \begin{bmatrix} \hat{D}'_m & \hat{D}'_{mf} & 0 \\ \hat{D}'_{mf} & \hat{D}'_f & 0 \\ 0 & 0 & \hat{D}'_c \end{bmatrix}$$

Como en todas las teorías MEF la implementación del principio de los trabajos virtuales resulta de gran ayuda, la cual se rige para solido de revolución por,

En láminas de espesor moderado y pequeña curvatura se cumple que $dA=dx'dz'$ es $\text{aprox} = ds dz'$.

El trabajo virtual interno se puede expresar en función de los esfuerzos y las deformaciones generalizadas. La expresión definitiva queda como,

$$2\pi \int_{\mathbf{s}} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{x} \, ds = 2\pi \int_{\mathbf{s}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}^T \mathbf{x} \, ds + \sum_i 2\pi \chi_i \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i$$

En el PTV aparecen únicamente primeras derivadas de los movimientos y pueden utilizarse elementos de clase C0 (se exige únicamente continuidad del campo de movimientos).

PREPROCESO

Datos de analisis

En primer lugar deberemos definir el problema que queremos resolver. En nuestro caso, nos encontramos en un problema de laminas, por lo que deberemos especificarlo en el programa de calculo “RamSeries”, tipo de simulación, dimensión de simulación, tipo de análisis, y tipo de elementos a analizar y los demás parámetros de análisis.

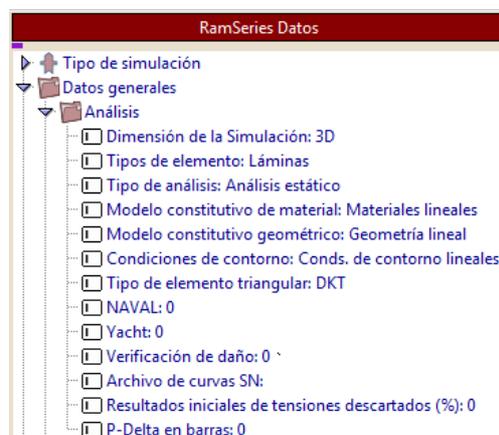


Imagen 1. Definición de tipo de analisis

En esta parte del problema definimos variables importantes a utilizar en los pasos siguientes.

Geometria

El primer paso a dar, es la definición de la geometría en el preproceso del programa “RamSeries Professional”, mediante las herramientas que nos aporta el mismo para realizar los dibujos, inicialmente generando los puntos obligados para el trazado de arcos en el plano que trabajaremos XY. Posteriormente se generara un

cuarto de la superficie de la torre de enfriamiento por medio de revolución a 90° , para trabajar de forma simétrica.

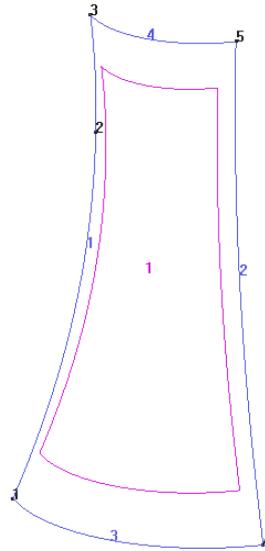


Imagen 2. Definición de la geometría

Condiciones de contorno

A partir de las condiciones de contorno establecidas por el enunciado, la cual se encuentra apoyada sobre columnas distribuidas en toda su longitud circunferencial, se realizó una modelación rápida simulando los apoyos de las columnas distribuidos cada 10° , como se aprecia en la imagen del enunciado, pero se observó que se generaban sobreesfuerzos que conllevaban a determinar espesores de más de 60 cm, lo cual no es aplicado a la realidad de estas torres, las cuales tienen espesores delgados.

Por todo esto, se optó por realizar la condición de simplemente apoyada en toda la línea circunferencial de la base $(0,0,1)$, de igual manera de las líneas de simetría rigiendo el giro respecto al eje Z y su desplazamiento perpendicular al origen.

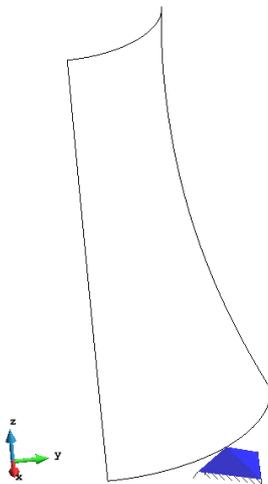


Imagen 3. Restricción de base del modelo $Z=1$

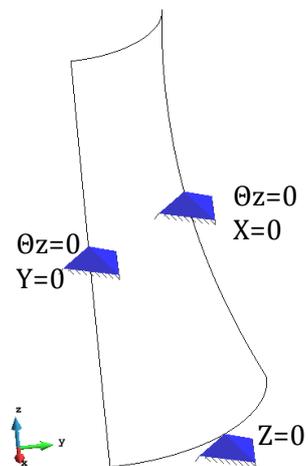


Imagen 4. Restricción de las líneas de simetría

Definición de material

Definimos para el modelo las propiedades asignadas en la formulación del problema, para este caso toda la estructura es en hormigón con las siguientes propiedades, las cuales son definidas por el programa, creando un nuevo material con propiedades de lamina Isotrópica,

Modulo de elasticidad	$E=19.8\text{kN/mm}^2$
Coefficiente de Poisson	$\nu= 0.18$
Peso específico del concreto.	$\gamma=23544\text{N/m}^3$
Espesor inicial para realizar análisis de convergencia.	$e= 5\text{cm}$



Imagen 5. Definición del tipo de material

Cargas

En este caso las únicas cargas actuantes en el problemas es el peso propio.

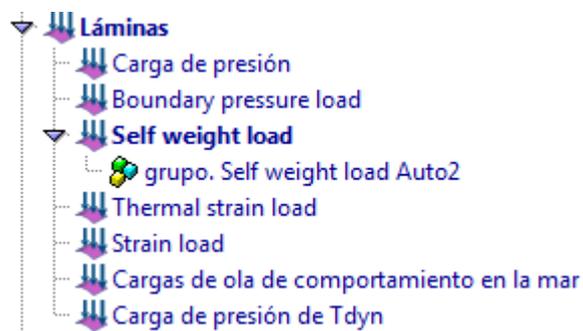


Imagen 6. Definición de las cargas. Peso propio

Análisis de convergencia

Para la obtención de resultados fiables y con un tiempo optimo de obtención de los cálculos del post-proceso, se necesita escoger el tipo de malla optima para garantizarlo. Esto se debe a que en MEF no todos los tipos de malla nos aportan valores fiables, por lo que se realiza un análisis de convergencia, en el cual nos muestre que tipo de malla converge más rápida y más homogéneamente.

Para esto, realizamos un análisis de convergencia en un punto aleatorio del modelo, el cual presente desplazamientos inducidos por las cargas actuantes, ya que los

demás parámetros como desplazamientos y esfuerzos de penden de la solución de la matriz global del sistema, específicamente del vector de desplazamiento, generando menos errores en la solución de los resultados.

En nuestro caso, utilizamos un análisis de convergencia con varios tipos de malla y asumiendo un espesor de 15 cm, obteniendo los desplazamientos del punto P3 con coordenadas (34,0,149) ubicado en la parte superior de la torre y sobre la línea revolucionada inicial de generación del modelo.

Se estudiaron tres tipologías de mallas estructuradas (ver Ilustraciones 7,8,9) con variación del tamaño de los elementos, con los siguientes resultados,

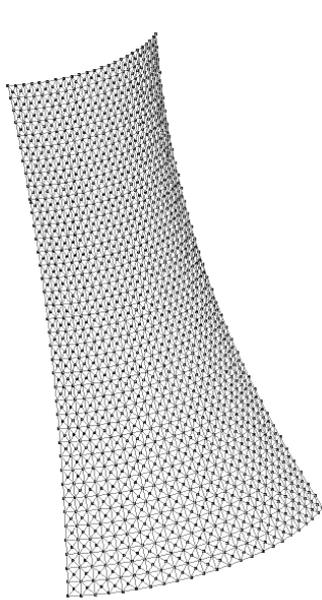


Imagen 7. MALLA DKT 3N 4m

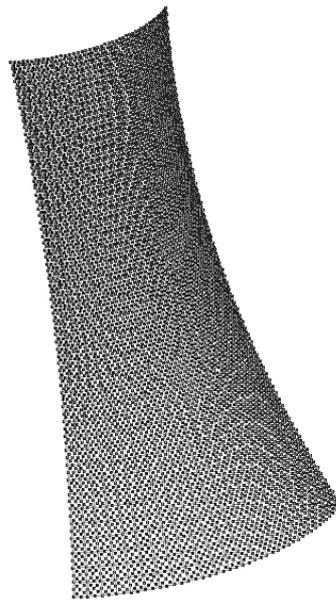


Imagen 8. Malla DKT 6N 5m

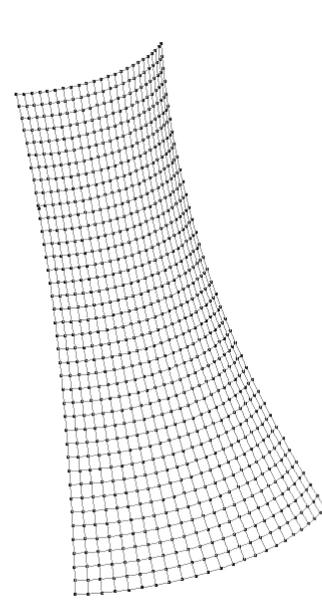


Imagen 9. Malla CLLL 3N 5m

DESPLAZAMIENTO P3 VS NUMERO DE NODOS						
	5m	4m	3m	2m	1m	0.5m
	ΔZ_a (m) / #Nodos					
DKT 3N	-0.0530951 1167	-0.0594618 1811	-0.0669275 3246	-0.0736634 7116	-0.0786948 28399	-0.0782244 113100
DKT 6N	-0.0784905 4564	-0.0792318 7116	-0.0793783 12814	-0.0798085 28214	-0.0804234 78642	-0.080156 176334
CLLL	-0.0526934 609	-0.0587123 937	-0.0659223 1665	-0.0728377 3620	-0.0784408 14323	-0.0800297 56796

Tabla 1. Analisis de convergencia

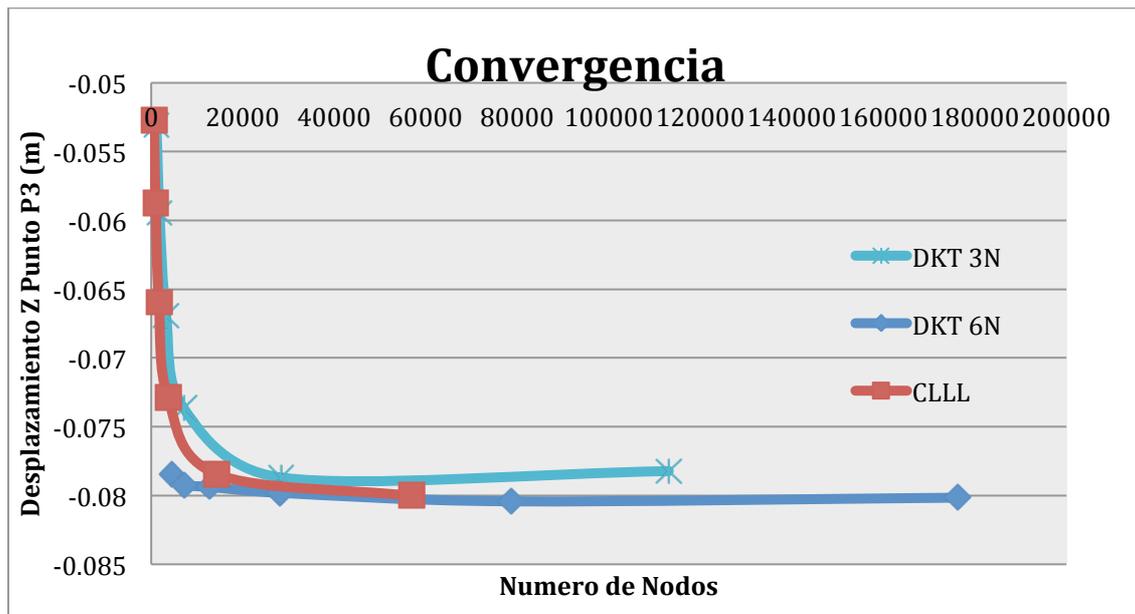


Grafico 1. Grafico analisis de convergencia

Como se aprecia en el gráfico, la malla tipo DKT de 6N converge rápidamente al valor del desplazamiento en la dirección Z del punto P3, con un valor de -0,801 m, por lo que se puede decir que este tipo de malla con un tamaño de 0,5 m es la más óptima para la realización del problema.

PROCESO

Una vez obtenida la malla a partir del análisis de convergencia, se procede a realizar el cálculo de cada uno de los desplazamientos obteniendo los datos de la tabla 1, llamando a esta etapa Proceso, la cual se realiza íntegramente en el programa "Ram Series Professional".

POST-PROCESO

En este apartado, conociendo la malla de cálculo, se procederá a calcular el espesor de la torre más óptimo, para el que se cumplan las condiciones establecidas en el enunciado.

Para esto, se ha realizado un análisis tentativo aumentando los espesores y obteniendo los esfuerzos principales para cada uno de ellos. Se ha empezado por un espesor de 5 cm incrementándolo en 5 cm hasta llegar al valor óptimo. Se han obtenido los siguientes resultados,

Esfuerzos principales				
Espesor (m)	Superior de la losa		Inferior de la losa	
	Tensión Si (Mpa)	Compresión Siii (Mpa)	Tensión Si (Mpa)	Compresión Siii (Mpa)
0.1	71.24	-5.21	57.173	-40.58
0.15	57.07	-4.2	46.5	-33.87
0.2	49.13	-3.85	40.94	-29.11
0.25	44.72	-3.81	34.66	-25.92
0.3	40.77	-3.65	32.02	-24.34
0.32	39.44	-3.63	31.13	-23.75

Tabla 2. Tanteo de espesores

Una vez realizado el tanteo, se ha podido observar que el valor optimo del espesor es de 32 cm , con el que no se sobrepasan las tensiones establecidas en el enunciado.

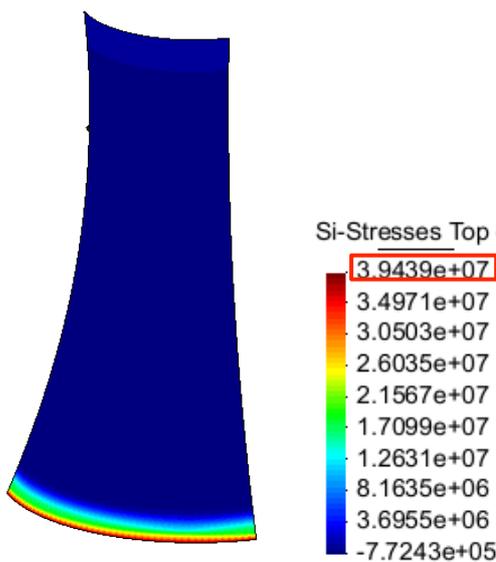


Imagen 10. Esfuerzo superior a tension, t=32cm

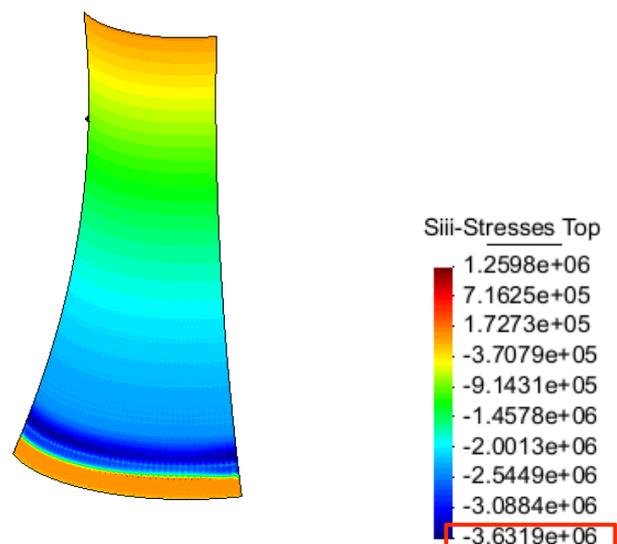


Imagen 11. Esfuerzo superior a compresion

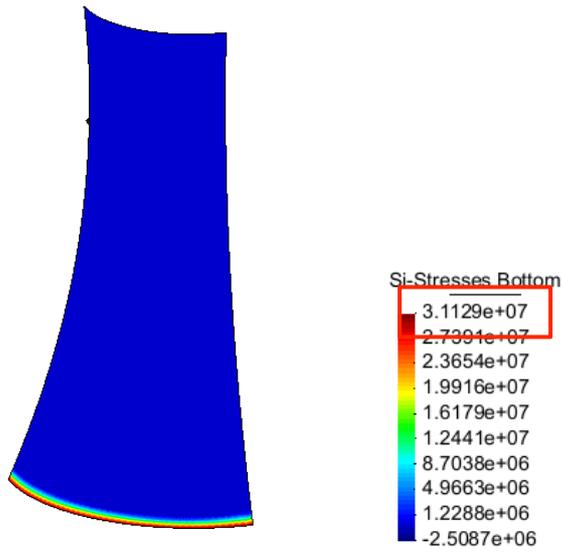


Imagen 10. Esfuerzo inferior max a tension, t=32cm

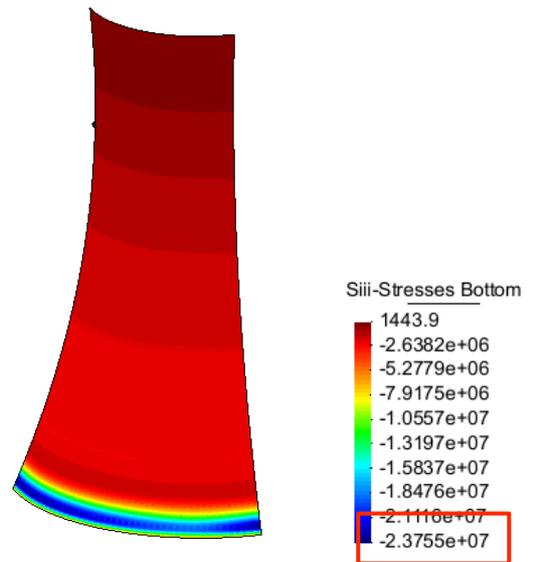


Imagen 11. Esfuerzo inferior max a compresion