



Escola Tècnica Superior d'Enginyers
de Camins, Canals i Ports de Barcelona

UPC BARCELONATECH

PROYECTO FINAL

INGENIERÍA DE ESTRUCTURAS

LUIS ALBERTO PECH POOT

MASTER EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y DE LA CONSTRUCCIÓN

INDICE.

1	PRESA DE MATERIALES SUELTOS.....	1
1.1	Análisis bidimensional.	2
1.1.1	Aspectos teóricos.	2
1.1.2	Preproceso.	3
1.1.3	Proceso.	5
1.1.4	Postproceso.....	5
1.2	Análisis con sólidos tridimensionales.....	11
1.2.1	Aspectos teóricos.	11
1.2.2	Preproceso.	13
1.2.3	Proceso.	14
1.2.4	Postproceso.....	15
1.3	Conclusiones.....	20
2	PLACA PLANA DE HORMIGÓN ARMADO.....	21
2.1	Análisis de placa delgada.	22
2.1.1	Aspectos teóricos.	22
2.1.2	Preproceso.	24
2.1.3	Proceso.	26
2.1.4	Postproceso.....	26
2.2	Conclusiones.....	32
3	Bibliography.....	32

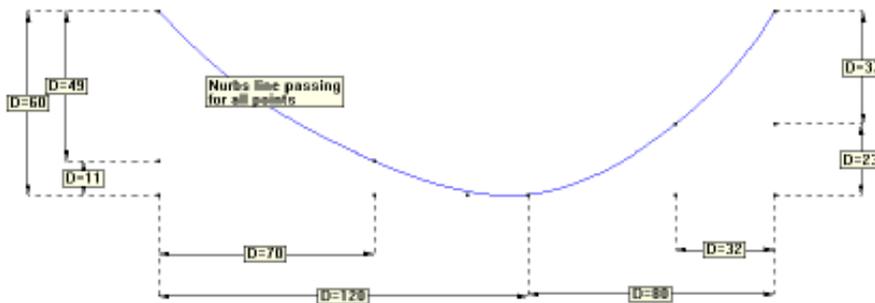
1 PRESA DE MATERIALES SUELTOS.

Dimensionar y calcular una presa de materiales sueltos de 60 m de altura con núcleo de arcilla. La anchura en coronación debe ser de 4 m. con las restricciones geométricas que se indican.

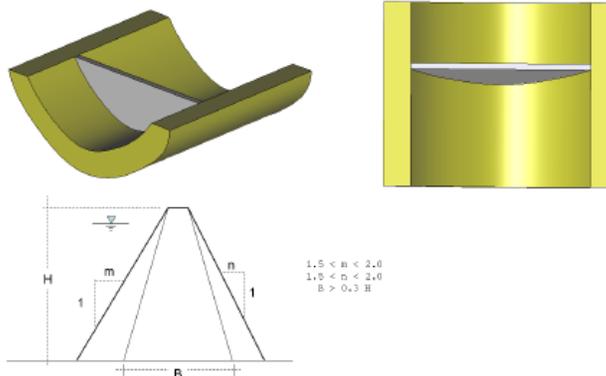
Realizar el proyecto mediante un análisis bidimensional y posteriormente en 3D para verificar el diseño utilizando en ambos casos las siguientes hipótesis:

- Las tracciones máximas en cualquier punto de la presa no deben superar 1 MPa.
- El peso específico del terreno y el material de construcción es de 20000 N/m³.
- El Módulo de elasticidad del material a usar es de 9900 K N/m² y el coeficiente de Poisson es de 0,285.
- El Módulo de elasticidad de la arcilla es de 8000 K N/m² y el coeficiente de Poisson es de 0.4.
- Base empotrada en el terreno.
- Cimentación en terreno homogéneo. Módulo de elasticidad: 35 G N/m² y coeficiente de Poisson 0,30.
- 7) Cargas actuantes:
 - Peso propio.
 - Peso propio + empuje hidrostático en presa y cimentación (altura del agua 58 metros).

El perfil del emplazamiento es el que se muestra:



La sección de terreno tiene un ancho de 30 metros y un desarrollo de 400 metros.



1.1 Análisis bidimensional.

1.1.1 Aspectos teóricos.

Debido a las dimensiones de la presa, en la cual una de las dimensiones es mucho mayor que las otras dos, se puede tomar el modelo de deformación plana.

En la teoría de deformación plana se encuentran involucrados los siguientes parámetros:

- Vector desplazamientos.

$$\overline{U}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}.$$

- Vector de deformaciones.

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

- Vector de tensiones.

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

- Relación tensión deformación.

$$\sigma = D\varepsilon$$

* Deformación plana

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \quad = d_{22} \\ d_{12} = d_{21} = -\frac{\nu}{1-\nu} d_{11} \\ d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \end{array} \right.$$

Figura 1 Matriz constitutiva. Fuente: Material didáctico del curso de Ingeniería de Estructuras-CIMNE-UPC.

- Ecuación de equilibrio mediante el Principio de Trabajos Virtuales.

$$\iint_A \delta * \bar{\varepsilon} * \bar{\sigma} t dA = \iint_A \delta * \bar{U}^T * \bar{b} t dA + \sum_i \delta * \bar{U} * P_i$$

Por la geometría de la estructura el elemento más conveniente a utilizar es el de triángulo de 3 nodos. Este elemento tendrá un mejor acoplamiento en las distintas zonas de la estructura que un elemento tipo cuadrilátero.

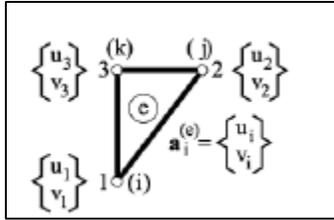


Figura 2 Elemento tipo triángulo de 3 nodos.

Este tipo de elemento cuenta con las siguientes características:

- Matriz de rigidez.

$$K^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \begin{Bmatrix} B^{T1} \\ B^{T2} \\ B^{T3} \end{Bmatrix}$$

- Vectores de fuerzas nodales equivalentes.
 - Fuerzas repartidas por unidad de área.

$$f_b^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \bar{N}^T b t dA$$

- Fuerzas repartidas sobre el contorno.

$$f_t^{(e)} = \oint_{l^{(e)}} \bar{N}^T b t ds$$

1.1.2 Preproceso.

- Geometría.

Se inició el cálculo de la presa con los valores mínimos de las variables de geometría, teniendo a B= 18 metros y las pendientes con m = n = 1.5.

Para evitar que el terreno sea más influyente en los resultados que la presa, se le dio una longitud de 584 m y un espesor de 60 m. Definidos los parámetros, se realizó el modelo mediante GID.

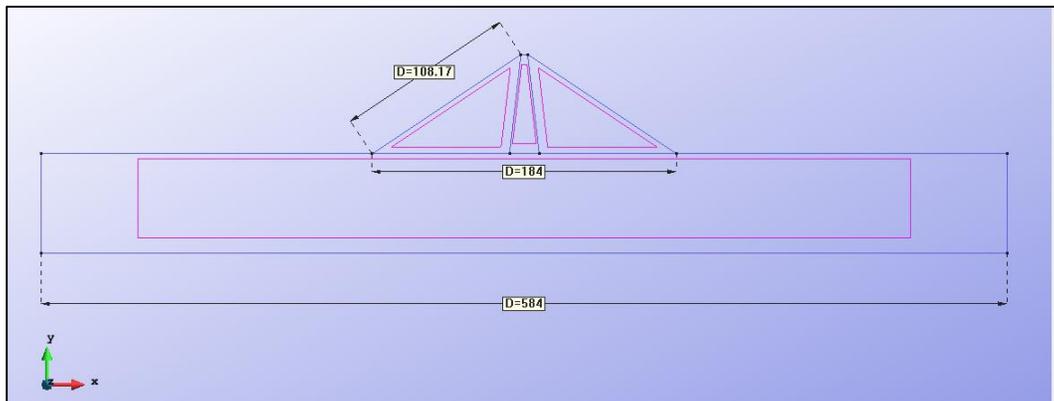


Figura 3 Geometría de la presa y el terreno.

- Condiciones de contorno.

Se restringieron los movimientos en "x" y "y" en la parte horizontal del suelo. En las zonas laterales se restringió el movimiento en "x" para permitir los movimientos verticales. Como lo indica el enunciado, la base de la presa esta empotrada al suelo.

- Cargas.

Se tuvieron dos análisis:

- Peso propio de la estructura.
- Peso propio + Carga hidráulica. Se definió una carga uniforme sobre el suelo (línea 15) de 580000 N/m correspondiente al agua, y una carga lineal de presión hidrostática sobre la presa (línea 11) con un valor de 0 desde una altura de 50 metros de la presa hasta 580000 N/m en la parte inferior de la presa.

En la Figura 4 se presentan las condiciones de contorno y las cargas aplicadas del segundo caso.

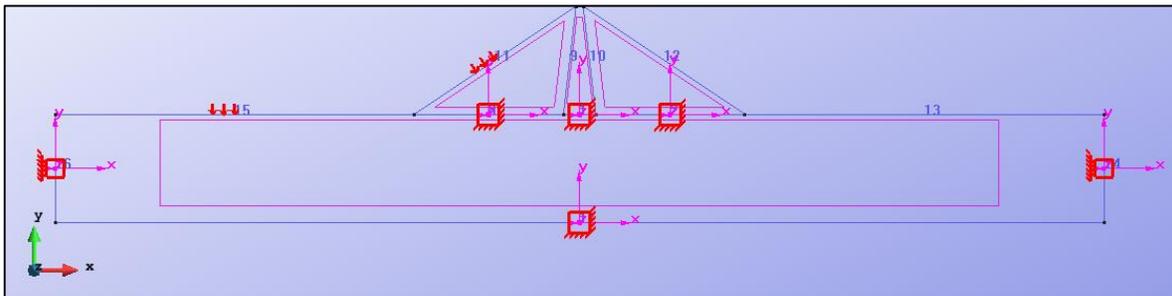


Figura 4 Condiciones de contorno y cargas.

- Materiales.

Los materiales utilizados fueron los indicados en el enunciado. Arcilla en el núcleo de la presa, un tipo de material en los laterales de la presa y el terreno.

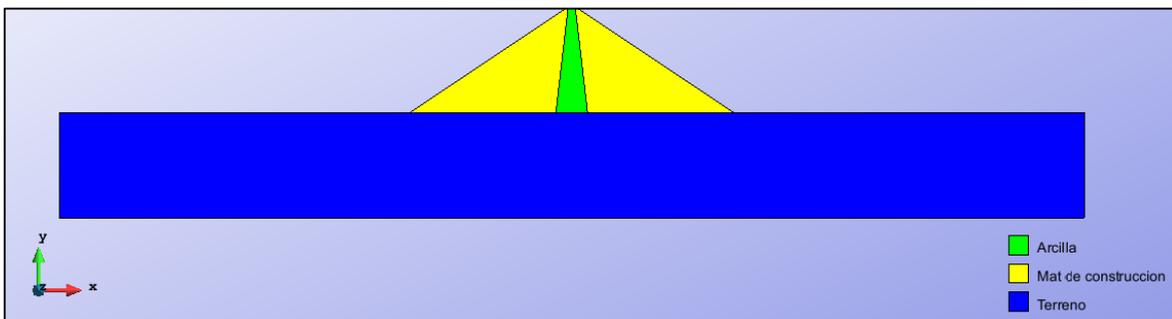


Figura 5 Materiales en la estructura.

- Mallado.

Como se indicó inicialmente, este problema se resolvió mediante la teoría de deformación plana, seleccionando el módulo de Ramseries/Plane_state.

Por las condiciones geométricas de la estructura, como se indicó anteriormente, el elemento más indicado es el de triángulo de 3 nodos. En el apartado de Postproceso se presenta un gráfico de convergencia entre los distintos tipos de tamaño de malla. En la Figura 5 se presenta un mallado de la estructura.

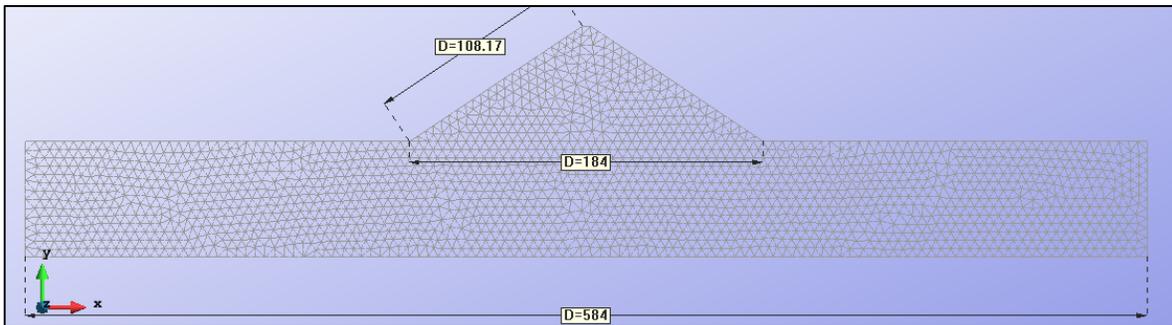


Figura 6 Mallado de la estructura con elementos tipo triángulo de 3 nodos.

1.1.3 Proceso.

Definidas las condiciones del apartado anterior, se procedió al cálculo de la estructura.

1.1.4 Postproceso.

Se realizaron dos tipos de cálculo: Análisis 1-Peso propio y Análisis 2- Peso propio + Carga Hidrostática.

- Análisis 1-Peso Propio.
 - Análisis de convergencia.

Inicialmente se realizó un análisis de convergencia para tener resultados fiables.

Para el primer análisis se analizó la variación de las tensiones S_x , en el punto medio del núcleo de la presa, con respecto al tamaño de malla. En la Tabla 1 y la Figura 8 se presentan los resultados del análisis de convergencia.

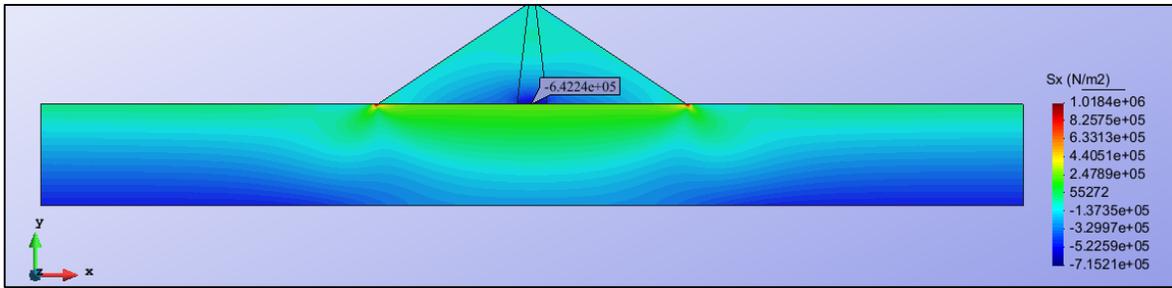


Figura 7 Punto del análisis de convergencia.

Tabla 1 Análisis de convergencia de la presa con peso propio. Triangulo de 3 nodos.

Tamaño Malla (m)	Nodos	Grados de libertad.	Sx(N/m ²)
10	535	1070	5.38E+05
7	1064	2128	5.95E+05
5	1983	3966	6.17E+05
3	5344	10688	6.27E+05
1.5	21110	42220	6.40E+05
1	32512	65024	6.42E+05

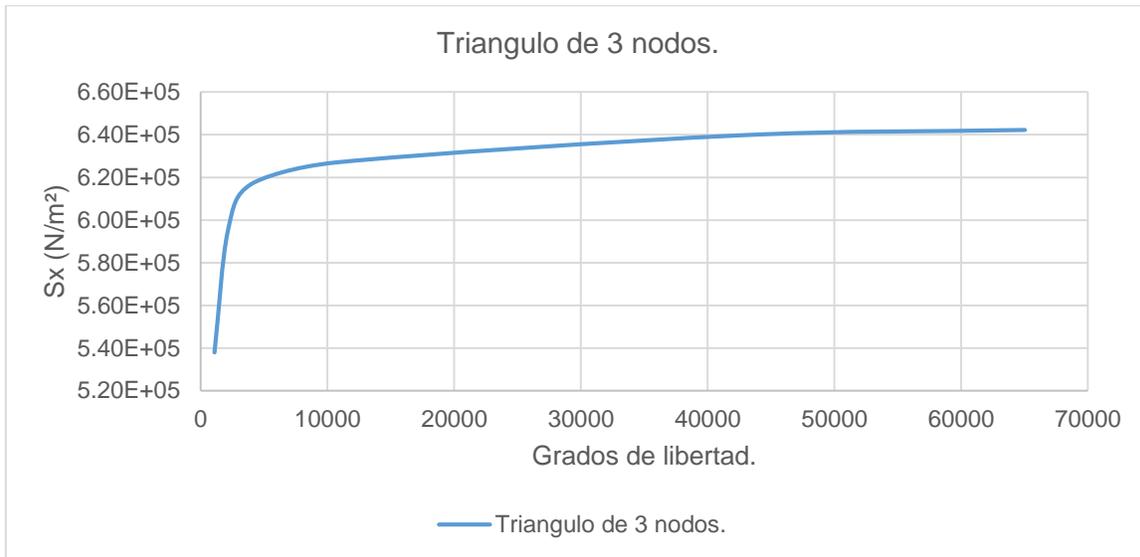


Figura 8 Análisis de convergencia de la presa con peso propio.

○ Resultados.

Con el tamaño de malla de 1 metro se obtuvo convergencia en los resultados por lo que se procedió a tomar los resultados obtenidos. En las Figura 9 se presentan las tensiones σ_x de la presa.

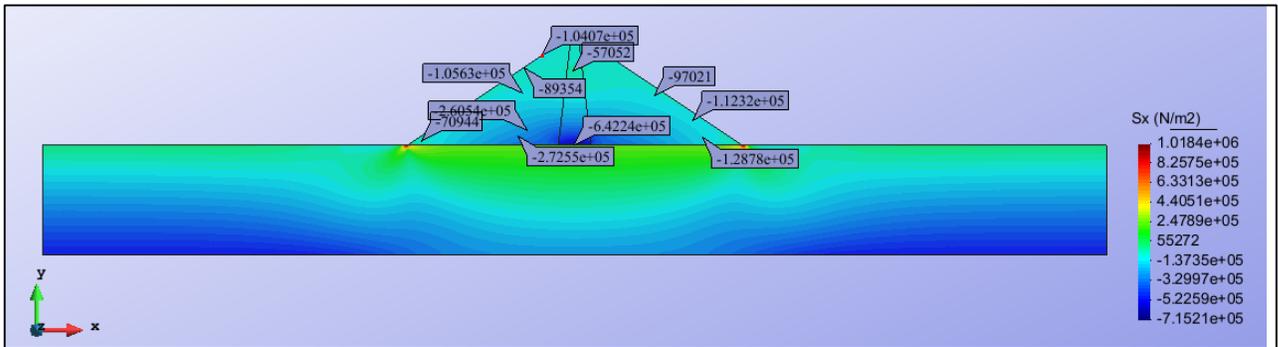


Figura 9 Tensiones S_x para el análisis 1-Peso propio.

En la Figura 9 se observan que las tensiones no superan las restringidas de 1 MPa. Se desarrollan las mayores tensiones en la parte inferior de la presa, con una tensión de compresión máxima de $6.42 \times 10^5 \frac{N}{m^2} = 0.642 \text{ MPa}$. Se observa que las tensiones son mayores en las zonas inferiores de la presa, esto debido al contacto con el suelo. También se observa que las tensiones son similares tanto en la pared izquierda y derecha de la presa debido a su condición simétrica y a que no están recibiendo cargas más que las del peso propio. Por otro lado, el terreno tiene las mayores tensiones debido a que absorbe las cargas de peso propio de la presa. Por último se observan unas concentraciones de tensiones en las puntas inferiores de la presa, esto debido al cambio brusco de geometría por lo que esos valores son ignorados.

En las siguientes figuras se presentan las tensiones en σ_y y las de cortante.

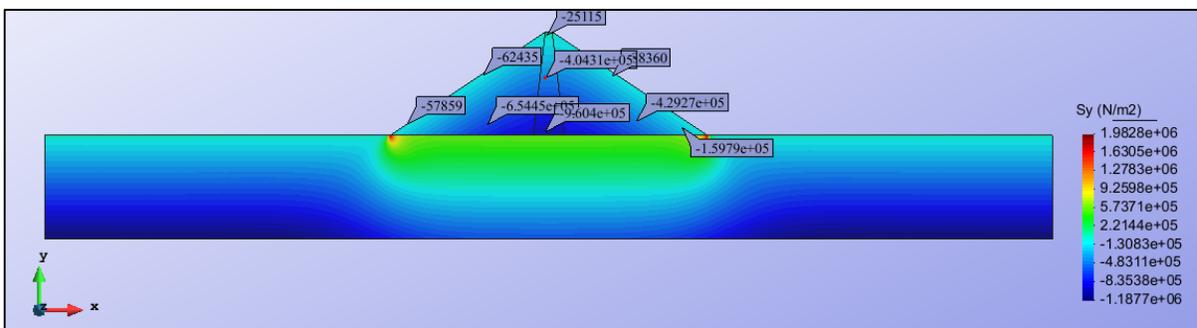


Figura 10 Tensiones σ_y del Análisis 1.

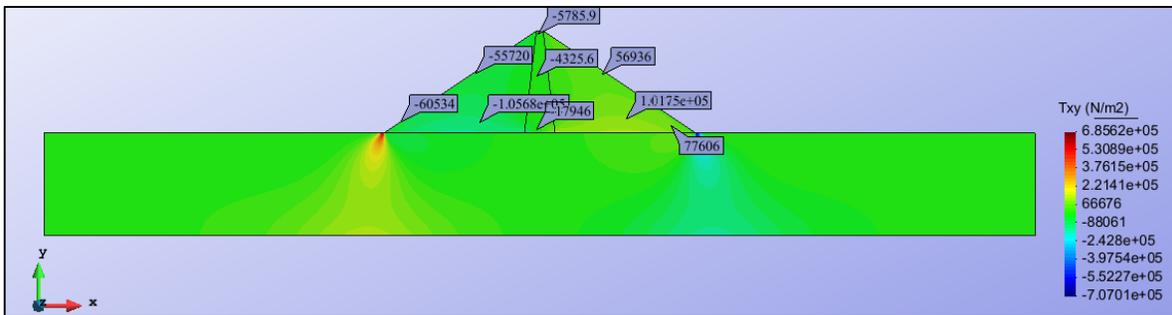


Figura 11 Tensiones de cortante T_{xy} . del Análisis 1.

En la figura 10 se observa, que al igual que en las tensiones σ_x , las tensiones σ_y son mayores en la zona inferior núcleo de la presa. En esta se da una tensión máxima de $9.6 * 10^5 \frac{N}{m^2} = 0.96 MPa$, valor inferior al máximo permitido de 1 MPa. Comparando ambos tipos de tensiones se tiene que las σ_y son mayores que las σ_x .

Con respecto a las tensiones de cortante observadas en la figura 11, se tiene que son de valores uniformes y bajos en toda la estructura. Por lo anterior se tiene que las tensiones de flexión rigen en esta estructura.

Por último se presentan los resultados de desplazamientos verticales. En la figura 12 se observa que estos desplazamientos son mayores en la parte superior de la presa, se dan unos grandes desplazamientos debido a que la estructura es de materiales sueltos. En la zona inferior de la presa no se observan desplazamientos debido a la condición de empotramiento indicado inicialmente. El suelo no sufre desplazamientos debido a su gran extensión es capaz de soportar las cargas de peso propio de la presa.

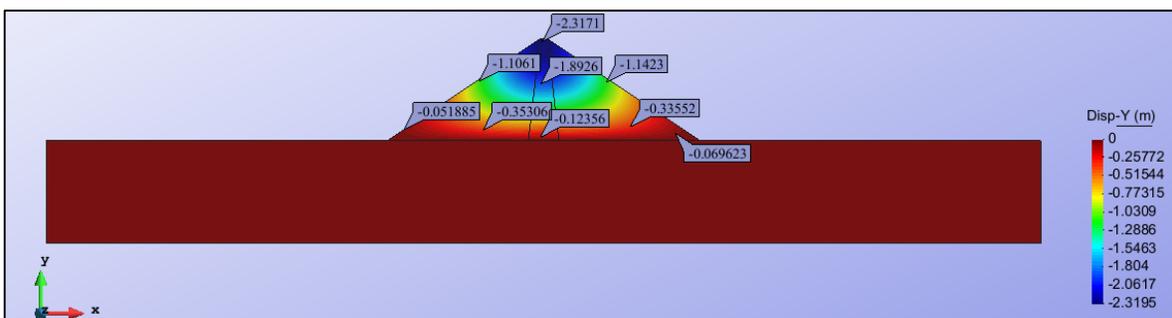


Figura 12 Desplazamientos verticales "y" en el análisis 1.

- Análisis 2-Peso propio + Carga Hidrostática.

En este análisis se aplicó la carga hidrostática en el suelo y en la pared de la presa.

Debido a que es la misma estructura, se adoptó el mismo tamaño de malla que en el análisis anterior.

Se procedió a realizar el cálculo con una malla de elementos tipo triangulo de 3 nodos de 1.2 m. de dimensión

- Resultados.

En la figura 13 se presentan las tensiones σ_x del análisis 2.

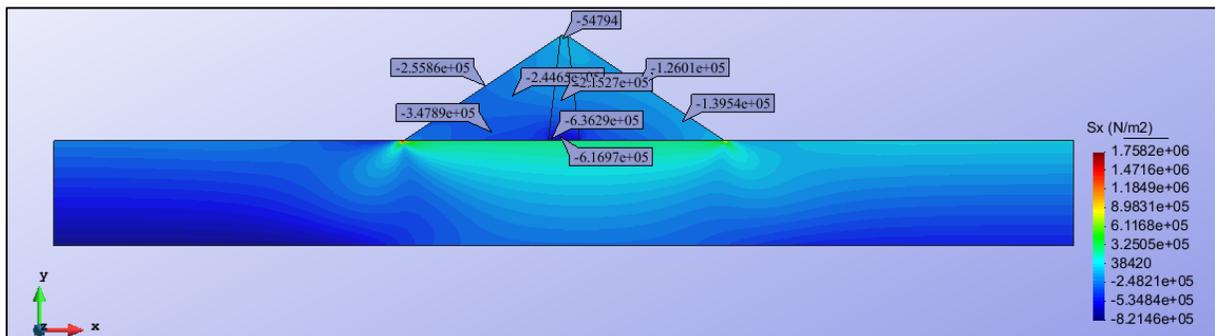


Figura 13 Tensiones σ_x del análisis 2.

De la Figura 13, se puede observar que las máximas tensiones se dan en la zona inferior del núcleo de la presa con un valor de tensión de compresión de 0.616 MPa, inferior al 1 MPa permitido. Se observa que las tensiones son mayores en la pared izquierda de la presa, esto se debe a la presión hidrostática. Las tensiones que se generan en la presa son de compresión. Con respecto al terreno las tensiones son mayores en la zona en la cual se tiene la carga hidráulica y conforme aumenta la profundidad estas tensiones van disminuyendo de valor. Por último se observa que las tensiones desarrolladas en la presa son mayores que en el caso en la que se aplica únicamente el peso propio.

En las figuras 14 y 15 se presentan las tensiones σ_y y de cortante respectivamente.

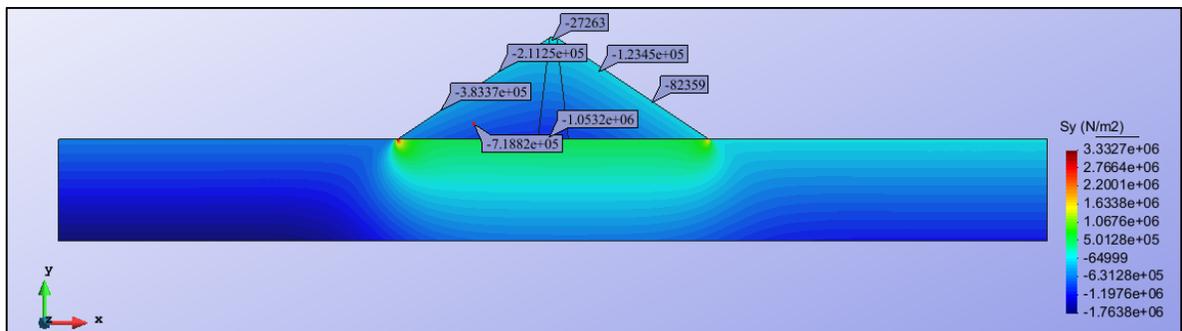


Figura 14 Tensiones σ_y del análisis 2.

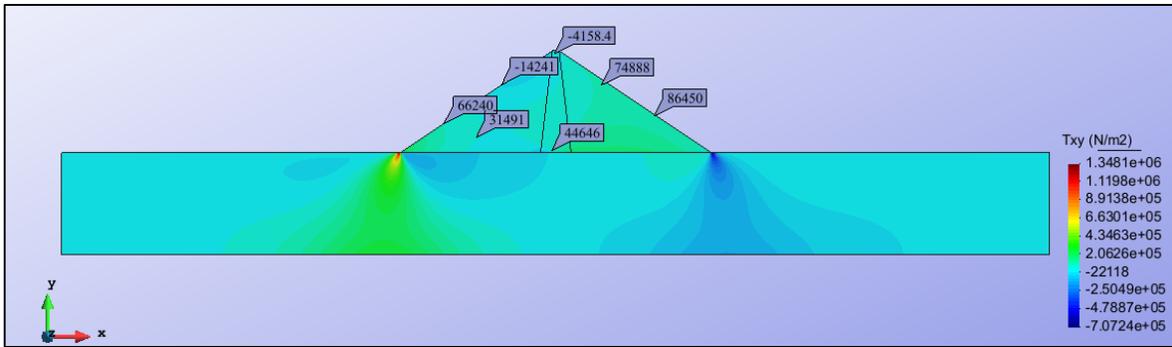


Figura 15 Tensiones de cortante T_{xy} del análisis 2.

De la figura 14 se observa que la mayor tensión σ_y desarrollada es de 1.05 MPa en la zona inferior del núcleo de la presa. Esta tensión puede ser tomada como de 1 MPa. Como en las tensiones σ_x , las tensiones son mayores en la pared izquierda de la presa debido a la presión hidrostática. Las tensiones son menores en las zonas superiores de la presa, lo anterior debido a que la presión hidrostática va disminuyendo desde el fondo de la presa.

Con respecto a las tensiones de cortante observadas en la figura 15, se tiene que son de valores pequeños en la presa, estos cortantes son mayores en la pared derecha.

Por último se presentan los desplazamientos verticales "y" y horizontales "x" en las figura 16 y 17 respectivamente.

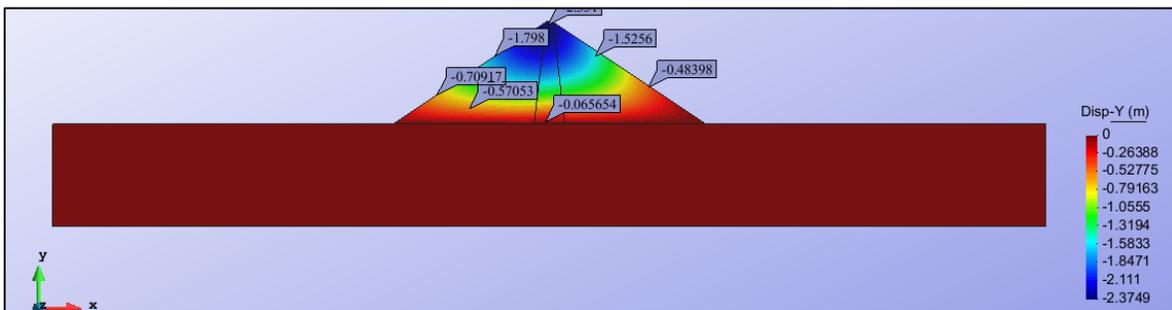


Figura 16 Desplazamientos verticales "y" del análisis 2.

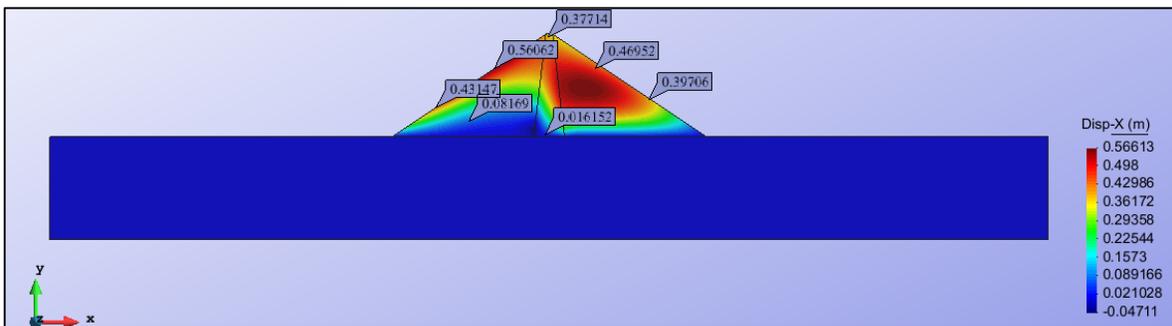


Figura 17 Desplazamientos horizontales "x" del análisis 2.

En la figura 16 se observan que los desplazamientos verticales son mayores en la zona superior de la presa, estos desplazamientos se dan debido al peso propio de la estructura. En la zona inferior es nulo el desplazamiento debido a la condición de empotramiento. Con respecto a los desplazamientos horizontales “x” de la figura 17 se observan que los mayores se dan en la pared izquierda de la presa, estos desplazamientos se dan debido a la presión hidrostática que se genera en la presa.

1.2 Análisis con sólidos tridimensionales.

En este apartado se procedió a resolver la presa anterior mediante sólidos tridimensionales, modelando en su totalidad la estructura.

1.2.1 Aspectos teóricos.

Debido a las características geométricas de la estructura en su conjunto presa-terreno, el problema se puede modelar mediante sólidos tridimensionales.

Los sólidos tridimensionales cuentan con las siguientes características:

- Vector desplazamientos.

$$\bar{U} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}.$$

- Vector de deformaciones.

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}$$

- Vector de tensiones.

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}$$

- Relación tensión deformación.

$$\sigma = D\varepsilon$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Figura 18 Matriz constitutiva. Fuente: Material didáctico del curso de Ingeniería de Estructuras-CIMNE-UPC.

- Ecuación de equilibrio mediante el Principio de Trabajos Virtuales.

$$\iiint_V \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} dv = \iiint_V \delta \bar{U}^T b dv + \iint_A \delta \bar{U}^T t dA + \sum_i \delta a_i^T q_i$$

Por la geometría de la estructura el elemento más conveniente a utilizar es el de tetraedros de 4 nodos.

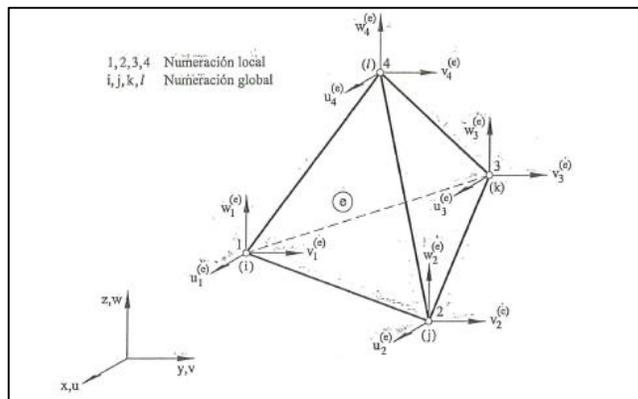


Figura 19 Elemento tipo tetraedro de 4 nodos. Fuente: Material didáctico de la asignatura Ingeniería de Estructuras CIMNE-UPC 2015.

Este tipo de elemento cuenta con las siguientes características:

- Matriz de rigidez.

$$K^{(e)} = \iiint_V B^T D B dv$$

- Vectores de fuerzas nodales equivalentes.

$$f^{(e)} = f_b^{(e)} + f_t^{(e)} + f_\varepsilon^{(e)} + f_\sigma^{(e)}$$

1.2.2 Preproceso.

- Geometría.

La geometría de la presa es la misma que en de la usada en el análisis bidimensional.

Se crearon curvas NURF para el terreno y se realizó una extrusión para crear el volumen. Para la presa se tomó la sección creada en el análisis bidimensional y se realizó la extrusión para crear el volumen, posteriormente se interseccionaron los dos volúmenes.

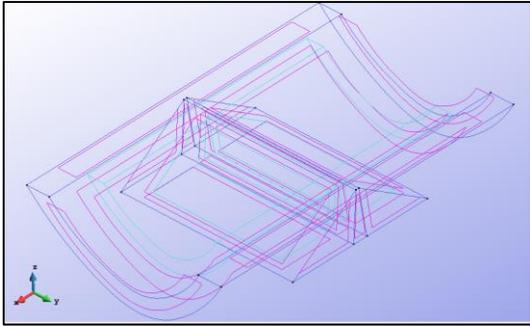


Figura 20 Geometría de la presa y el terreno.

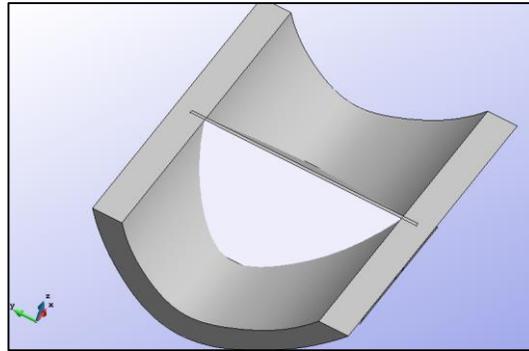


Figura 21 Geometría de la presa y el terreno.

- Condiciones de contorno.

Se restringieron los movimientos en “x”, “y” y “z” en la parte horizontal del suelo. En las zonas laterales se restringió el movimiento en “x” y “y” para permitir los movimientos verticales. Como lo indica el enunciado, la base de la presa esta empotrada al suelo.

- Cargas.

Se tuvieron dos análisis:

- Peso propio de la estructura.
- Peso propio + Carga hidráulica. Se definió una carga uniforme sobre el suelo de 580000 N/m^2 correspondiente al agua, y una carga lineal de presión hidrostática sobre la presa con un valor de 0 desde una altura de 50 metros de la presa hasta 580000 N/m^2 en la parte inferior de la presa.

- Materiales.

Los materiales utilizados fueron los indicados en el enunciado. Arcilla en el núcleo de la presa, un tipo de material en los laterales de la presa y el terreno.

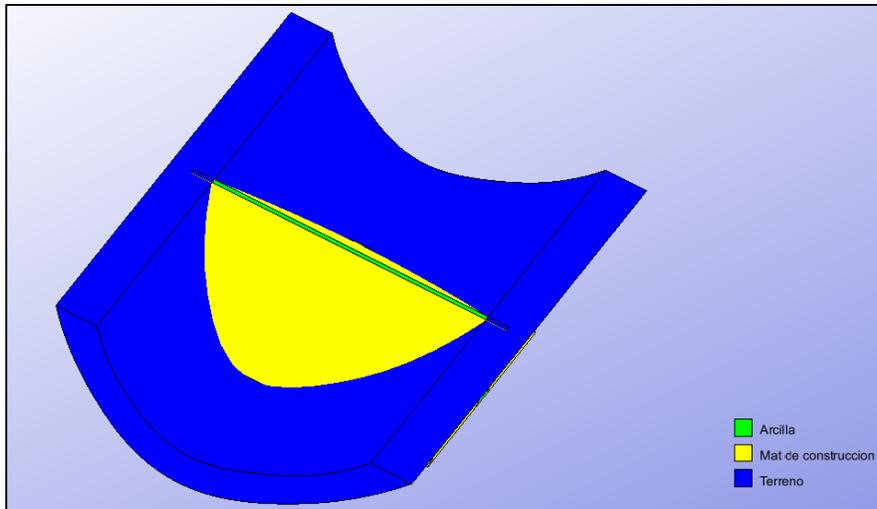


Figura 22 Materiales en la estructura.

- **Mallado.**

Como se indicó inicialmente, este problema se resolvió mediante la teoría de sólidos tridimensionales, seleccionado el módulo de Ramseries/3D_solids.

Inicialmente se pensó el cálculo mediante elementos tetraedros de 4 nodos sin embargo no se encontraba convergencia por lo que finalmente se tomaron elementos tetraedros de 8 nodos. En el apartado de Postproceso se presenta un gráfico de convergencia entre los distintos tipos de tamaño de malla. En la Figura 24 se presenta un mallado de la estructura.

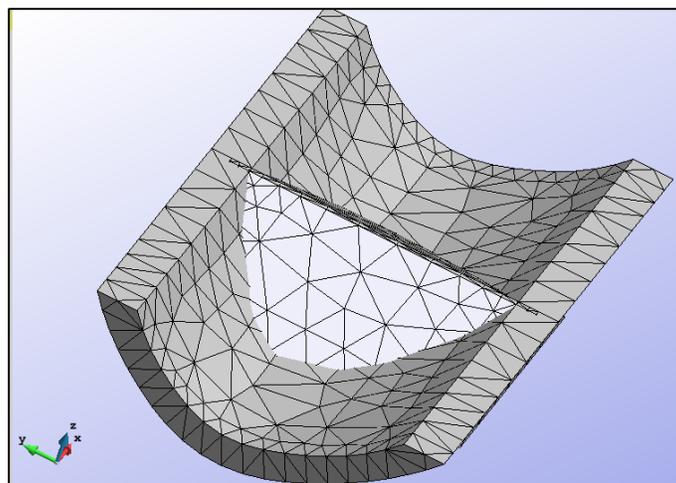


Figura 23 Mallado de la estructura con elementos tipo tetraedro de 8 nodos.

1.2.3 Proceso.

Definidas las condiciones del apartado anterior, se procedió al cálculo de la estructura.

1.2.4 Postproceso.

Se realizaron dos tipos de cálculo: Análisis 1-Peso propio y Análisis 2- Peso propio + Carga Hidrostática.

- Análisis 1-Peso Propio.
 - Análisis de convergencia.

Inicialmente se realizó un análisis de convergencia para tener resultados fiables.

Para el primer analizó la variación de las tensiones S_x , en el punto medio de la pared de la presa. En la Tabla 2 y la Figura 25 se presentan los resultados del análisis de convergencia.

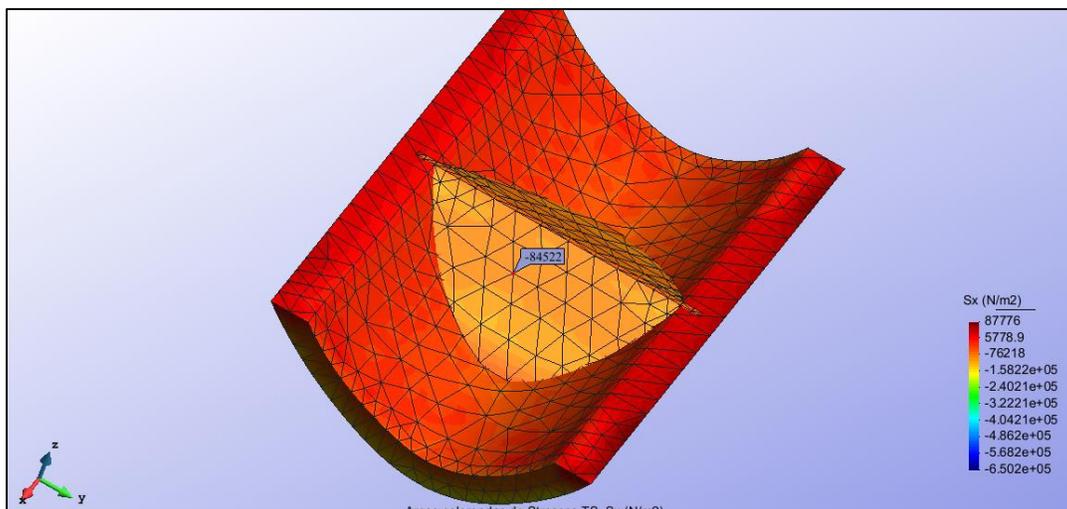


Figura 24 Punto del análisis de convergencia.

Tabla 2 Análisis de convergencia de la presa con peso propio. Tetraedro 8 nodos.

Tamaño Malla (m)	Grados de libertad.	$S_x(N/m^2)$
40	6949	90651
35	7783	91853
30	9610	87580
25	12958	84278
23	15646	84522
21.5	18650	84520
20	23608	84320
19.8	24541	84124
19	27349	84109

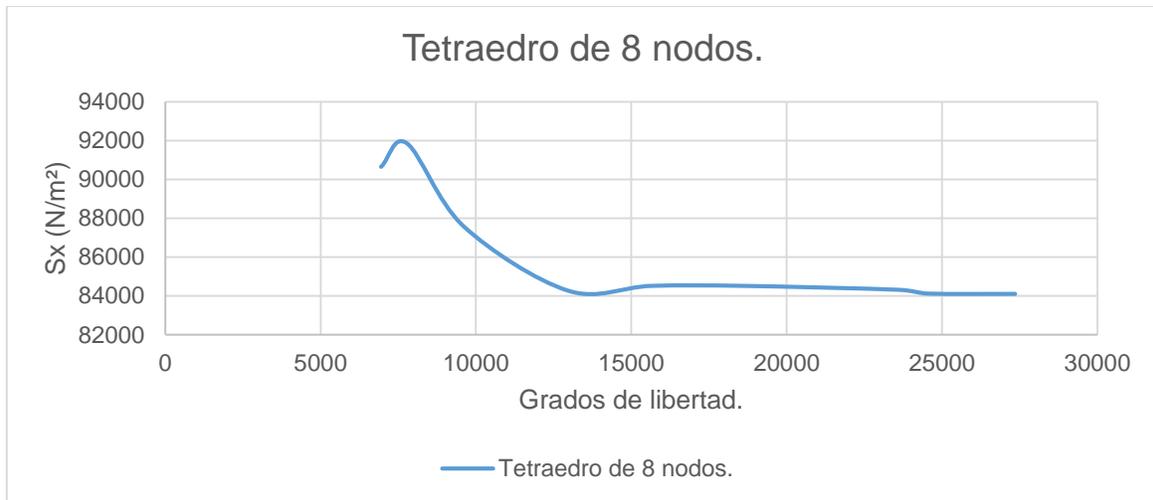


Figura 25 Análisis de convergencia de la presa con peso propio.

○ Resultados.

Con el tamaño de malla de 26, se obtuvo convergencia en los resultados por lo que se procedió a tomar los resultados obtenidos. En las Figura 9 se presentan las tensiones σ_x de la presa.

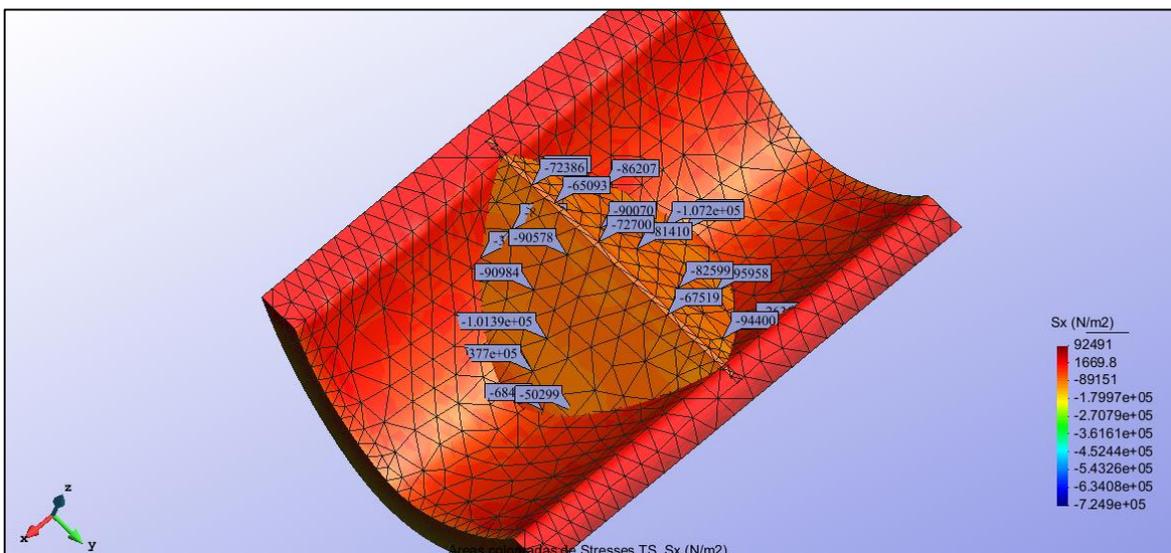


Figura 26 Tensiones σ_x para el análisis 1-Peso propio.

En la figura 25 se observan que las tensiones σ_x más grandes se desarrollan en la parte inferior de la presa con un valor de 0.15 MPa, inferior al de 1 MPa. Se observa también que las tensiones son similares en ambas paredes de la presa, debido a su condición simétrica y que únicamente está actuando la carga de peso propio.

Para comparar los resultados del análisis bidimensional y el del presente apartado se tiene que la σ_y del estado bidimensional es σ_z del análisis tridimensional. Lo anterior debido a los planos en que fueron dibujos ambos casos. En las figuras 27 y 28 se presentan las tensiones σ_z y el cortante respectivamente.

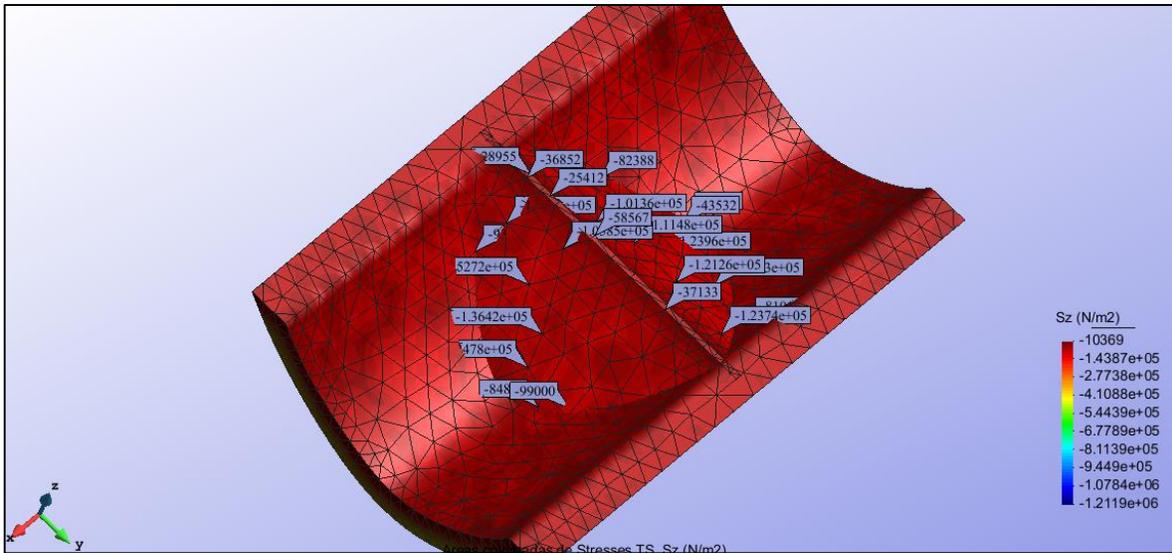


Figura 27 Tensiones σ_z del Análisis 1.

En la figura 27 se observa, que al igual que en las tensiones σ_x , las tensiones σ_z son mayores en la zona inferior del núcleo de la presa. En el presente caso se tienen tensiones de 0.14 MPa. Comparando ambos tipos de tensiones se tiene que las σ_z son mayores que las σ_x .

Por último se presentan los resultados de desplazamientos verticales. Al igual que lo sucedido en el análisis bidimensional, los mayores desplazamientos se presentan en la zona superior de la presa y van disminuyendo conforme se acercan a su base.

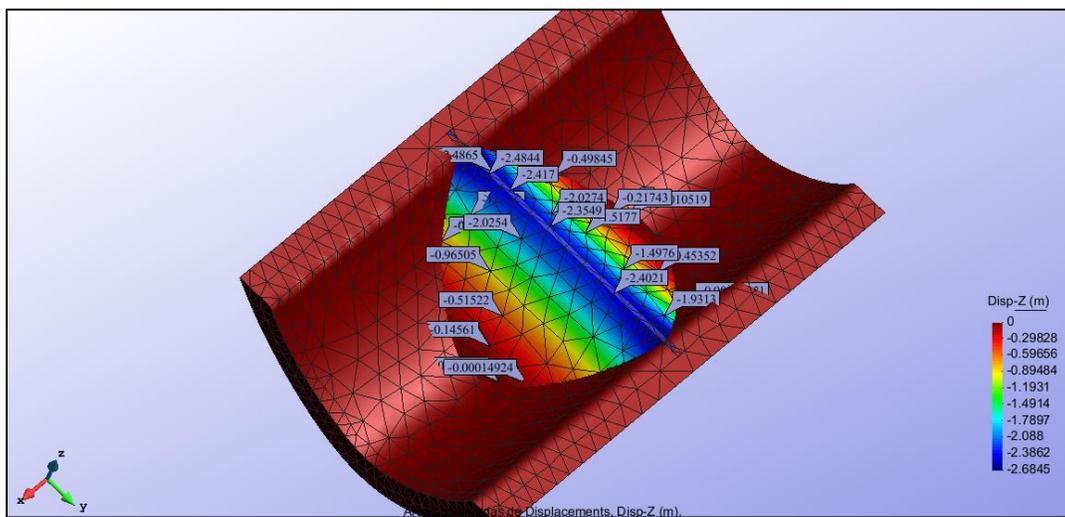


Figura 28 Desplazamientos verticales "z" en el análisis 1.

- Análisis 2-Peso propio + Carga Hidrostática.

Para este análisis se modificó el modelo usado anteriormente, agregándole la carga hidrostática al suelo y a la pared izquierda de la presa. El valor de las cargas aplicadas se definió en el apartado 1.2.2 Preproceso.

Se procedió a realizar el cálculo con una malla de elementos tipo tetraedros de 8 nodos.

- Resultados.

En la figura 29 se presentan las tensiones σ_x del análisis 2.

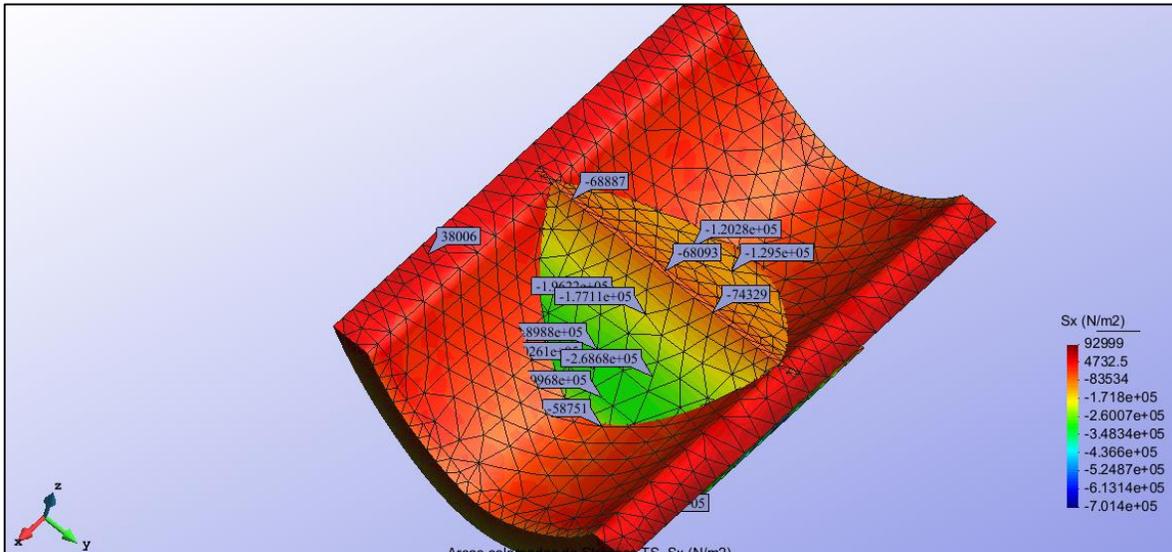


Figura 29 Tensiones σ_x del análisis 2.

En la figura 29, se observa que las mayores tensiones σ_x se dan en la parte inferior de la presa, con un valor máximo de tensión de compresión de 0.35 MPa. De igual manera se observa que las tensiones son mayores se dan en la parte izquierda de la presa, la cual es la que resiste la presión hidrostática. Las presiones en la presa son de compresión. Con respecto al terreno se observa que son menores comparadas a las que se generan en la presa, por otro lado las tensiones del terreno son mayores en la zona izquierda que es la que soporta la carga hidrostática sin embargo por sus dimensiones, el terreno las absorbe de manera uniforme a lo largo de su longitud.

Como se indicó en el apartado anterior, para este caso las tensiones σ_z son las correspondientes a las σ_y del análisis bidimensional. Lo anterior debido al plano en que se modela la estructura. En la figura 30 se presentan las tensiones σ_z .

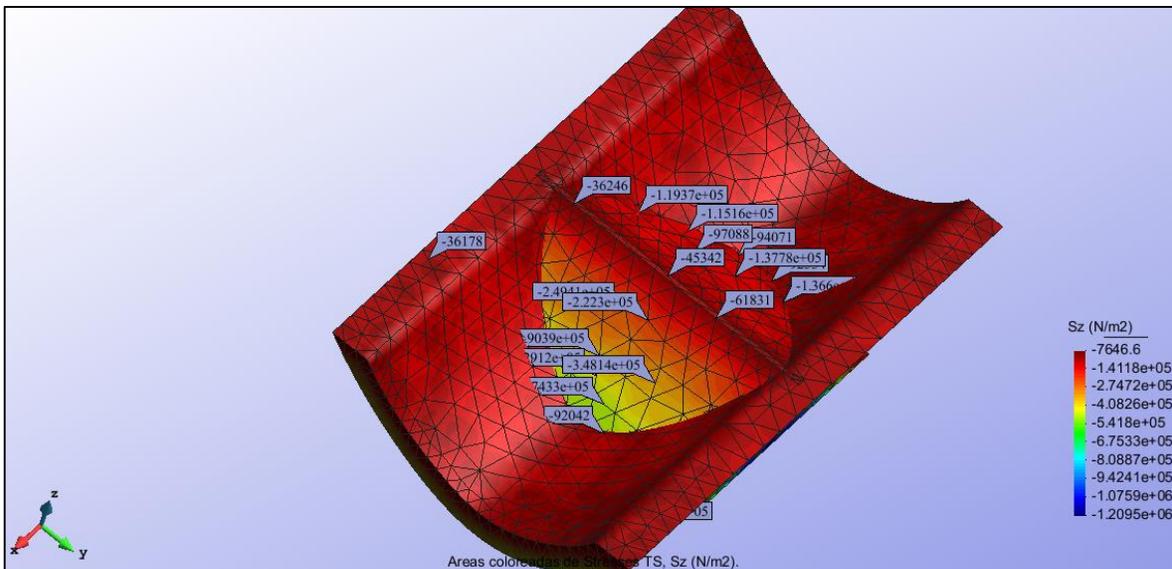


Figura 30 Tensiones σ_z del análisis 2.

En la figura 30 se observa que las tensiones σ_z son mayores en la parte inferior de la presa y del lado izquierdo de la misma, lo anterior debido a que es la zona que soporta las presiones hidrostáticas. Se tiene una tensión de compresión máxima de 0.4 MPa. En el terreno las tensiones son uniformes, generándose las mayores en la zona izquierda donde se soporta la carga hidrostática.

Por último se presentan los desplazamientos verticales “z” y horizontales “x” en las figura 31 y 32 respectivamente.

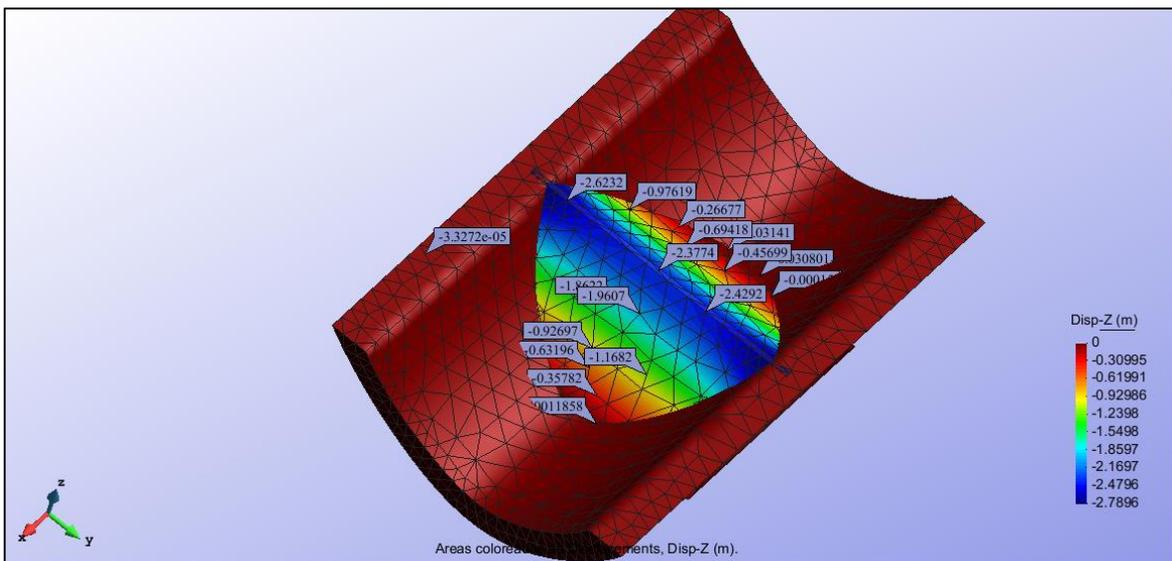


Figura 31 Desplazamientos verticales “z” del análisis 2.

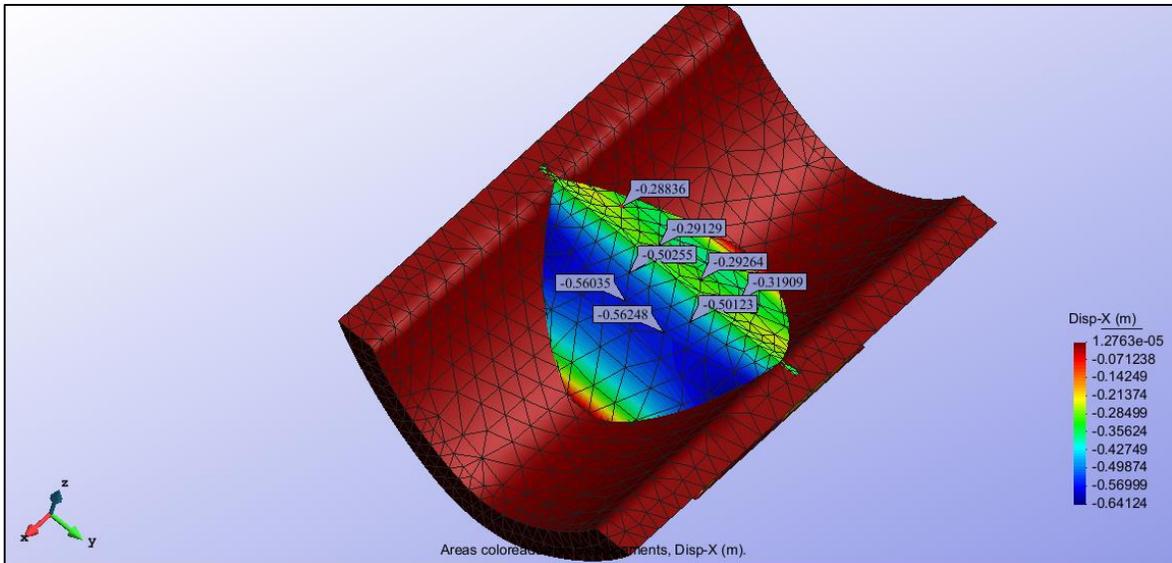


Figura 32 Desplazamientos horizontales "x" del análisis 2.

En la figura 31 se observan que los desplazamientos verticales son mayores en la zona superior de la presa, estos desplazamientos se dan debido al peso propio de la estructura. En la zona inferior es nulo el desplazamiento debido a la condición de empotramiento. Con respecto a los desplazamientos horizontales "x" de la figura 17 se observan que los mayores se dan en la pared izquierda de la presa, estos desplazamientos se dan debido a la presión hidrostática que se genera en la presa.

1.3 Conclusiones.

La geometría adoptada inicialmente fue satisfactoria para el objetivo de este ejercicio de no superar 1 MPa en ninguna zona de la presa.

Comparando los resultados de los análisis bidimensionales y el de sólidos tridimensional se concluye que ambos son satisfactorios. Lo anterior debido a que las tensiones máximas de compresión en las zonas inferiores del núcleo de la presa son similares, como se observa en las figuras 9 y 29.

El realizar un análisis tridimensional puede ofrecer resultados más precisos, sin embargo el proceso de modelado es más complejo y el tiempo de cálculo es más largo que realizarlo mediante un análisis bidimensional. Por lo anterior, un análisis bidimensional es más eficiente si se quieren conocer resultados de manera simplificada.

2 PLACA PLANA DE HORMIGÓN ARMADO.

La figura muestra una placa plana de hormigón armado sujeta a una carga uniformemente repartida y con las condiciones de apoyo indicadas.

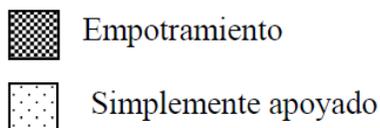
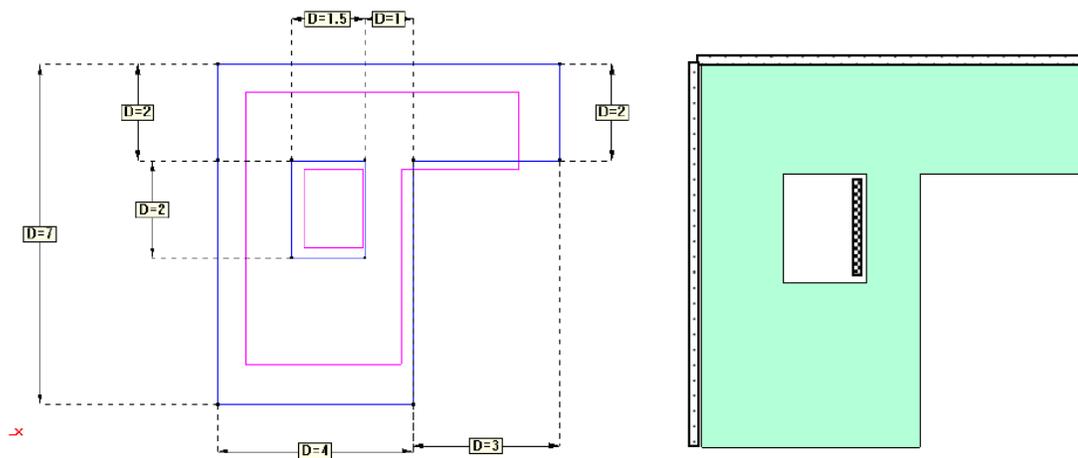
Calcule el valor máximo de la carga que satisface las restricciones que se indican.

- Las tracciones máximas en cualquier punto no deben superar los 30 MPa.
- Las compresiones máximas en cualquier punto no deben superar los 30 MPa.
- Tomar los valores de E y ν de un hormigón estándar.
- El espesor de la placa es de 0.20 m

Cargas actuantes:

- Peso propio
- Peso propio + carga uniforme.

Las dimensiones en metros de la placa:



2.1 Análisis de placa delgada.

2.1.1 Aspectos teóricos.

La placa se considera delgada debido a que $\frac{h}{L} = \frac{0.2m}{7m} = 0.028 < 0.1$.

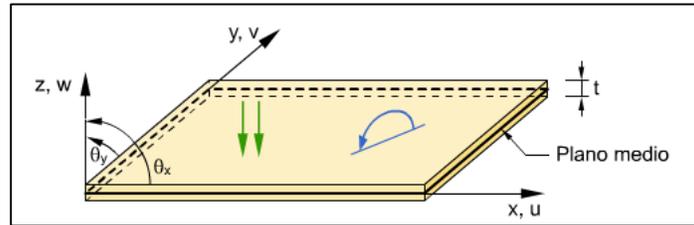


Figura 33 Placa. Fuente: Material didáctico de la asignatura de Ingeniería de Estructuras. CIMNE-UPC.

“La teoría de placas delgadas de Kirchoff se basa en las siguientes hipótesis:

- En los puntos del plano medio $u=v=0$. En otras palabras, los puntos del plano medio sólo se mueven verticalmente.
- Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical.
- La tensión normal σ_z es despreciable.
- Los puntos sobre rectas normales al plano medio antes de la deformación permanecen sobre rectas también ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación.” (Oñate, 1995).

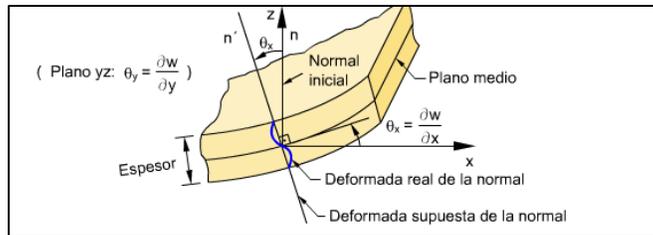


Figura 34 Placa. Fuente: Material didáctico de la asignatura de Ingeniería de Estructuras. CIMNE-UPC.

Las placas delgadas de Kirchoff cuentan con los siguientes parámetros:

- Vector desplazamientos.

$$\mathbf{u} = \left[w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T$$

- Vector de deformaciones.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

- Vector de tensiones.

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

- Relación tensión deformación.

$$\sigma = D\varepsilon$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Figura 35 Matriz constitutiva. Fuente: Material didáctico del curso de Ingeniería de Estructuras-CIMNE-UPC.

- Ecuación de equilibrio mediante el Principio de Trabajos Virtuales.

$$\iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iint_A \delta w q dA + \sum_i \delta w_i P_i$$

Por la geometría de la estructura el elemento más conveniente a utilizar es el de cuadrilátero MZC.

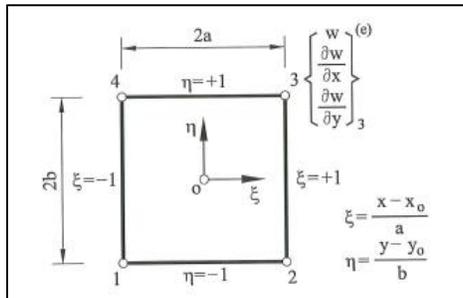


Figura 36 Elemento tipo cuadrilátero MZC.

Este tipo de elemento cuenta con las siguientes características:

- Matriz de rigidez.

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_i^T \widehat{D}_f B_j dx dy$$

- Vectores de fuerzas nodales equivalentes.

$$f_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} P_i \\ M_{x_i} \\ M_{y_i} \end{Bmatrix}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} N_i^T q dx dy = \iint_{A^{(e)}} q \begin{Bmatrix} N_i \\ \bar{N}_i \\ \bar{N}_i \end{Bmatrix} dx dy$$

2.1.2 Preproceso.

- Geometría.

Mediante el software GID se realizó el modelo de la placa.

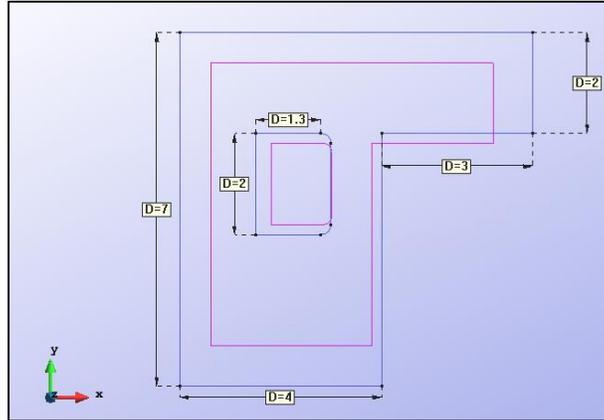


Figura 37 Geometría de placa.

En la figura 37 se observa que en el hoyo dentro de la placa se redondearon 2 puntas debido a que en esa zona se tenían concentración de tensiones por cambio brusco de geometría.

- Condiciones de contorno.

Como lo indica el inciso, en la línea 15 de placa se realizó un empotramiento restringiendo los desplazamientos en "z" y los giros en "x" y "y".

En las líneas 5 y 6 se colocaron las condiciones de apoyo simple, restringiendo únicamente el desplazamiento en "z" y permitiendo los giros. En la figura 38 se pueden observar las condiciones de contorno en la placa.

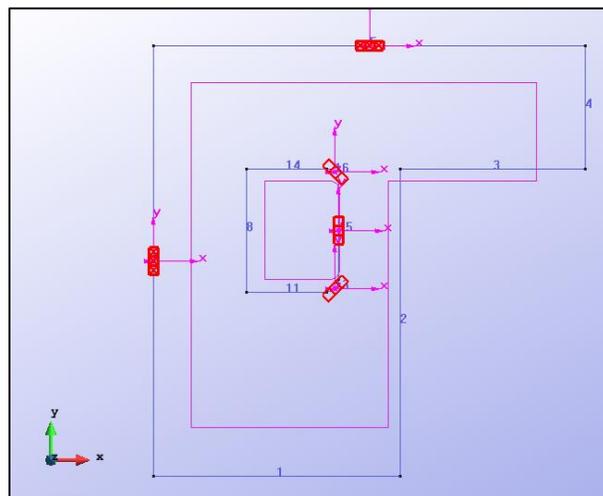


Figura 38 Condiciones de contorno en la placa.

- Cargas.

El objetivo de este ejercicio es encontrar el valor máximo de carga uniforme que puedan generar tensiones máximas de compresión y tracción de 30 MPa. Por lo que se inició aplicando una carga uniforme de 3 MPa en toda la placa. Luego de un proceso de iteración se obtuvo que la carga máxima soportada para las condiciones limitantes es de 7 MPa.

También se consideró el peso propio de la placa.

- Materiales.

Como lo indica el enunciado, la placa es de hormigón. Este tiene un módulo de elasticidad de $3 \times 10^{10} \frac{N}{m^2}$, un coeficiente de Poisson de 0.2 y un peso específico de $25000 \frac{N}{m^3}$. Se le aplicó un espesor de 0.20 metros a la placa.

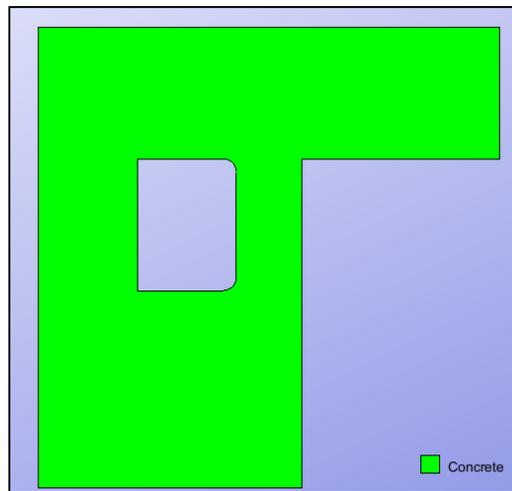


Figura 39 Materiales en la estructura.

- Mallado.

Como se indicó inicialmente, este problema se resolvió mediante la teoría de placas delgadas, seleccionando el módulo de Ramseries/Plates.

En la figura 40 se presenta el mallado de la estructura con elementos tipo cuadrilátero MZC.

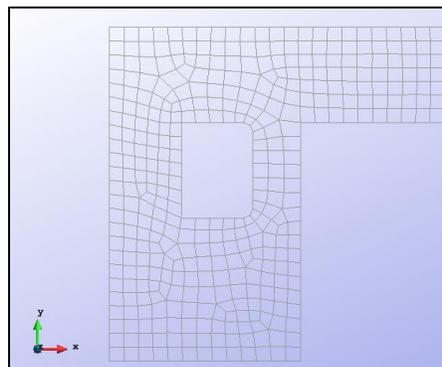


Figura 40 Mallado de la estructura con elementos tipo cuadrilátero MZC.

2.1.3 Proceso.

Definidas las condiciones del apartado anterior, se procedió al cálculo de la estructura.

2.1.4 Postproceso.

Se realizó un primer cálculo con una carga uniforme sobre la placa de 3 MPa para obtener una referencia de las tensiones que puede resistir la placa. Los resultados de tensiones de tracción se presentan en la figura 41.

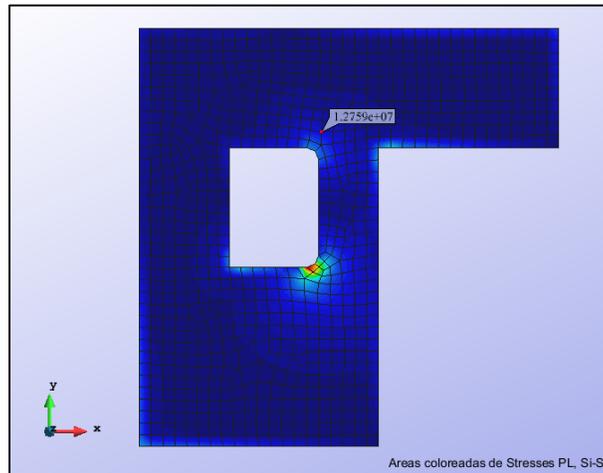


Figura 41 Tensiones de Tracción. N/m².

En la figura anterior se observa que con la carga de 3 MPa se desarrolla una tensión de tracción máxima de 13 MPa. Suponiendo que se tendrá un cambio proporcional si aumentamos al doble la carga obtendremos el resultado que deseamos, se procedió a realizar el análisis de convergencia con una carga uniforme sobre la placa de 6 MPa.

En la figura 42 se presenta el nodo en el cual se realizó el análisis de convergencia.

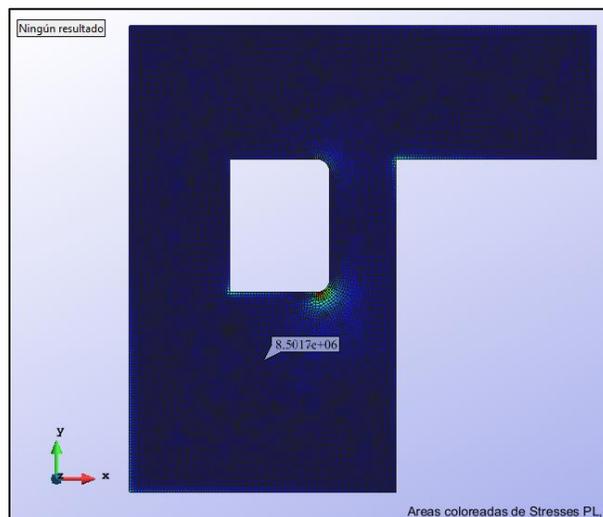


Figura 42 Punto del análisis de convergencia. Tracciones en N/m².

En la tabla 3 se presentan los resultados del análisis de convergencia.

Tabla 3 Análisis de convergencia. Cuadrilatero MZC.

Tamaño Malla (m)	Grados de libertad.	Tracciones(N/m ²)
1	249	9.89E+06
0.8	269	9.86E+06
0.6	391	1.23E+07
0.3	1230	1.03E+07
0.15	4500	8.92E+06
0.1	10209	8.57E+06
0.08	15901	8.77E+06
0.06	29551	8.42E+06
0.04	67668	8.50E+06

En la figura 43 se observa con mejor detalle el comportamiento de las tensiones conforme la malla se iba afinando.

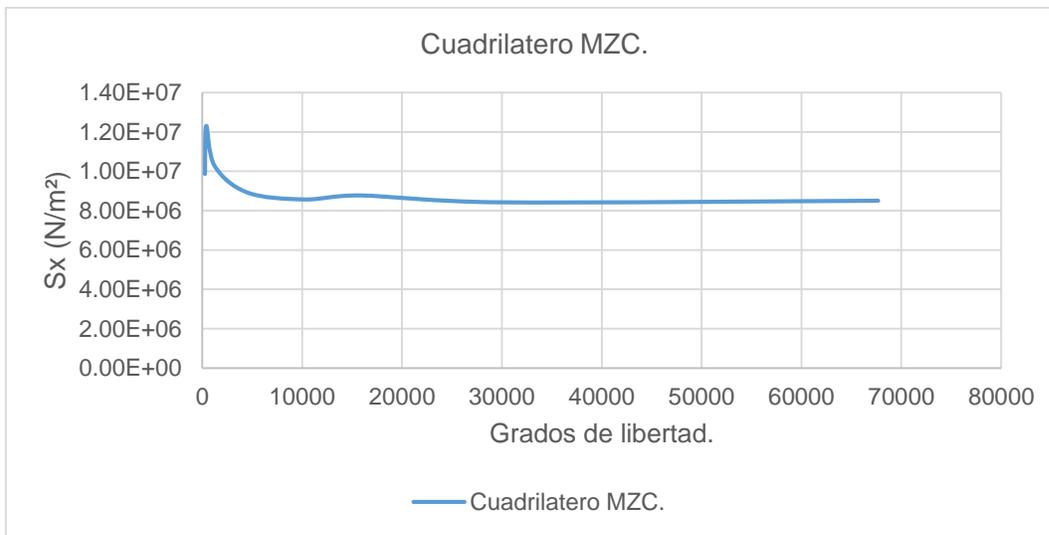


Figura 43 Análisis de convergencia.

○ Resultados.

Con el tamaño de malla de 0.04 m se obtuvo convergencia por lo que se tomaron los resultados de esa malla como válidos.

Debido a que con la tensión supuesta de 6 MPa, las tracciones en el hormigón sobrepasaban los 30 MPa se realizó un análisis iterativo hasta que se encontró que la máxima carga uniforme soportada por la placa de hormigón fue de 4 MPa.

En la figura 44 se presentan las tensiones de tracción que se desarrollan en la placa.

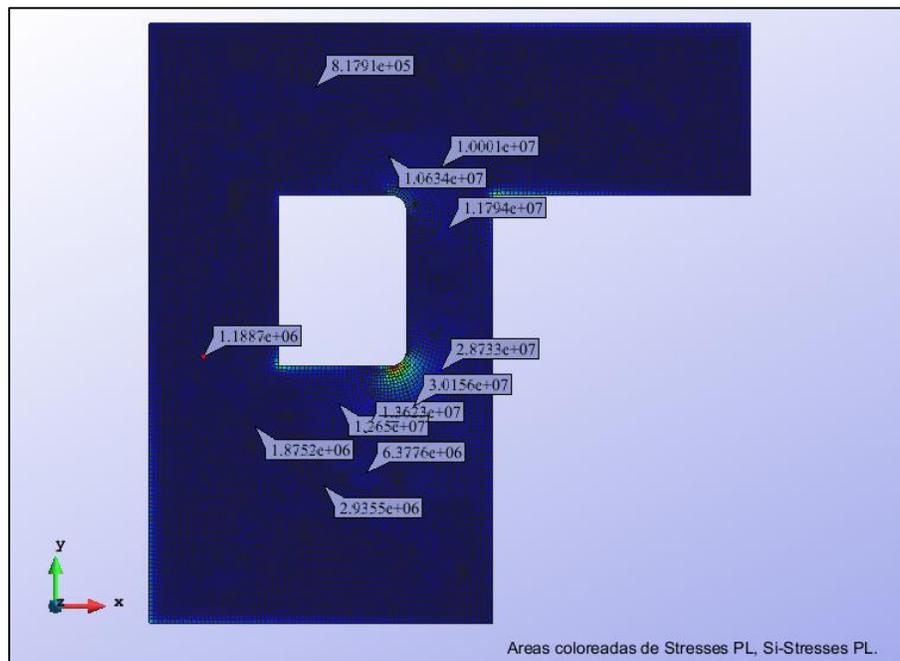


Figura 44 Tracciones en la placa. N/m²

En la figura 44 se observa que las máximas tracciones se generan alrededor de la zona de la abertura de la placa y cerca de la zona empotrada. De igual manera se observa que la máxima tracción es de 30 MPa. Por otro lado se observa que en una de las puntas existe una concentración de tensiones, en la cual los valores se disparan, esto debido al cambio brusco de geometría(a pesar de haberse sido redondeada la punta) por lo que esos valores se desprecian.

En la figura 45 se presentan las compresiones sobre la placa. En ella se pueden observar que las compresiones son menores a las tracciones observadas en la figura anterior. La compresión máxima tiene un valor 6.16 MPa. Al igual que en las tracciones, las compresiones son mayores alrededor de la abertura en la placa.

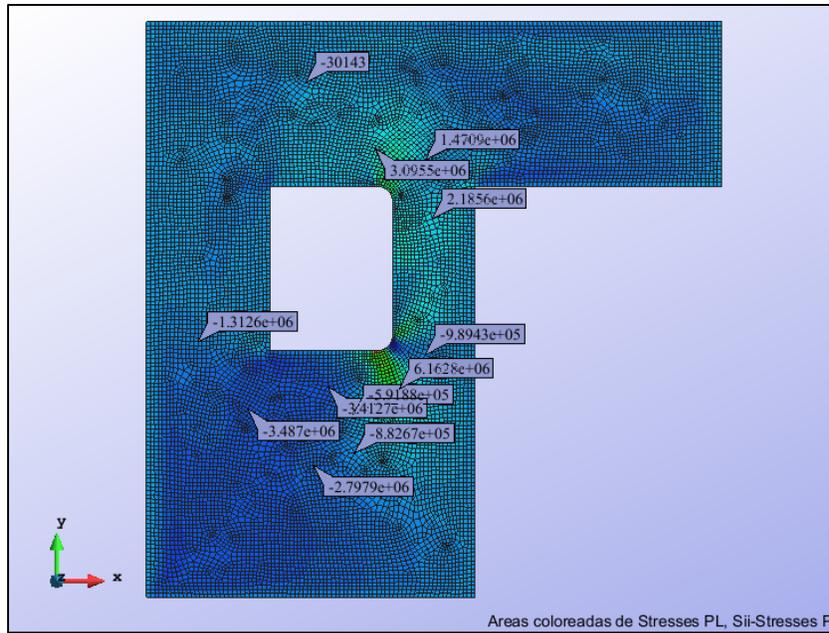


Figura 45 Compresiones en la placa. N/m^2 .

Como resultados adicionales, en las siguientes figuras se presentan los resultados de momentos flectores en la placa.

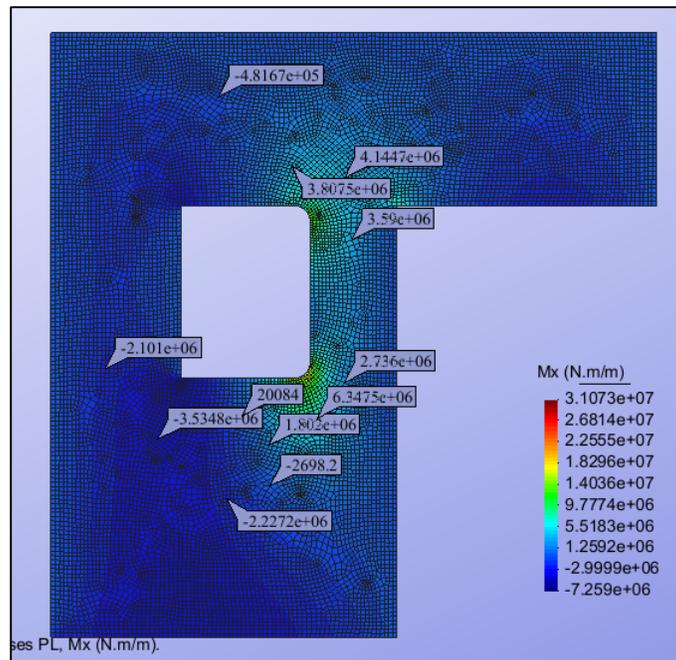


Figura 46 Momentos M_x en la placa.

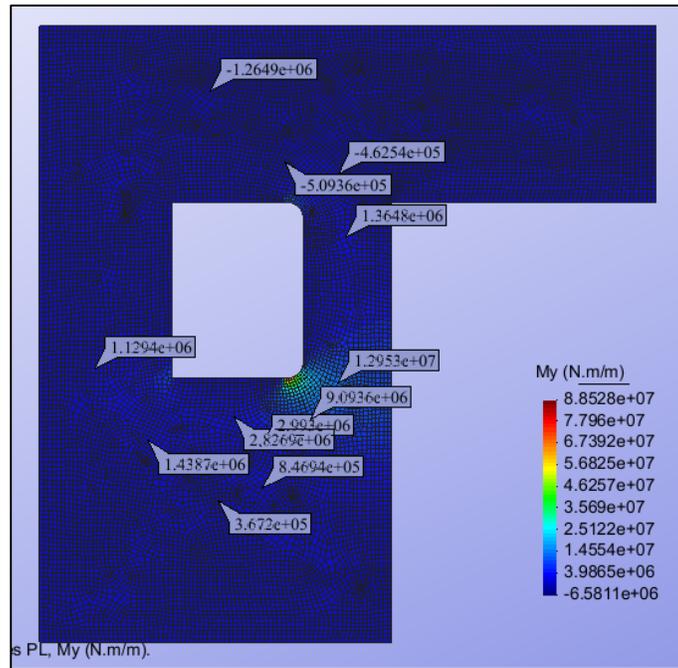


Figura 47 Momentos My en la placa.

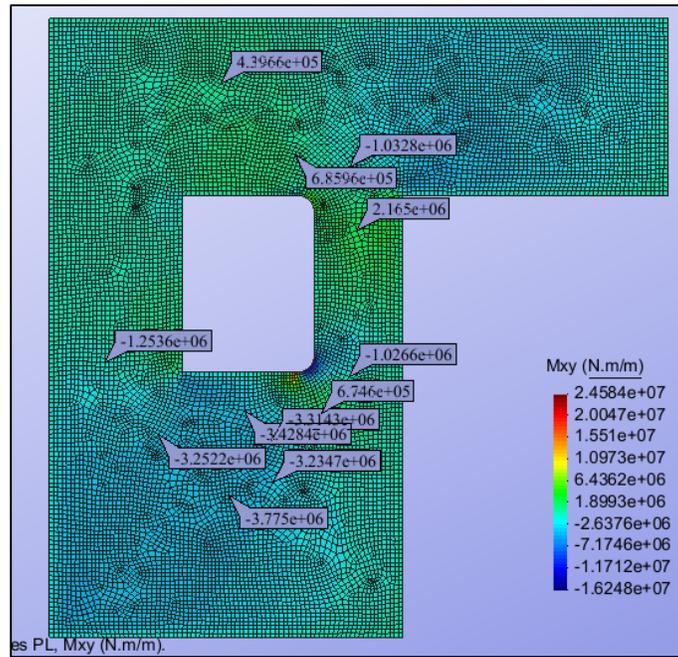


Figura 48 Momentos Mxy en la placa.

Con respecto a los momentos de flexión que se desarrollan, se tiene que son mayores alrededor de la abertura dentro de la placa. De los 3 tipos de momentos se tienen que los de M_y son los mayores, teniendo un momento máximo de $9.09 \times 10^6 N \cdot m/m$.

Con respecto a los desplazamientos, en la figura 49 se presentan los verticales "z". Se observa que los mayores desplazamientos se dan en las zonas donde la placa no está apoyada, teniéndose hasta un desplazamiento máximo de 2 m debido a la carga distribuida.

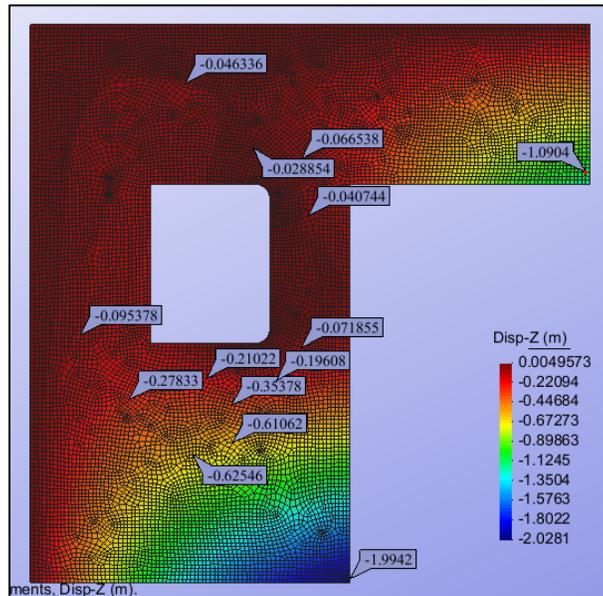


Figura 49 Desplazamientos verticales "z" en la placa.

Por último en la figura 50 se presentan las distribuciones de tracciones y compresiones respectivamente que se generan en la placa debido únicamente a la carga de peso propio.

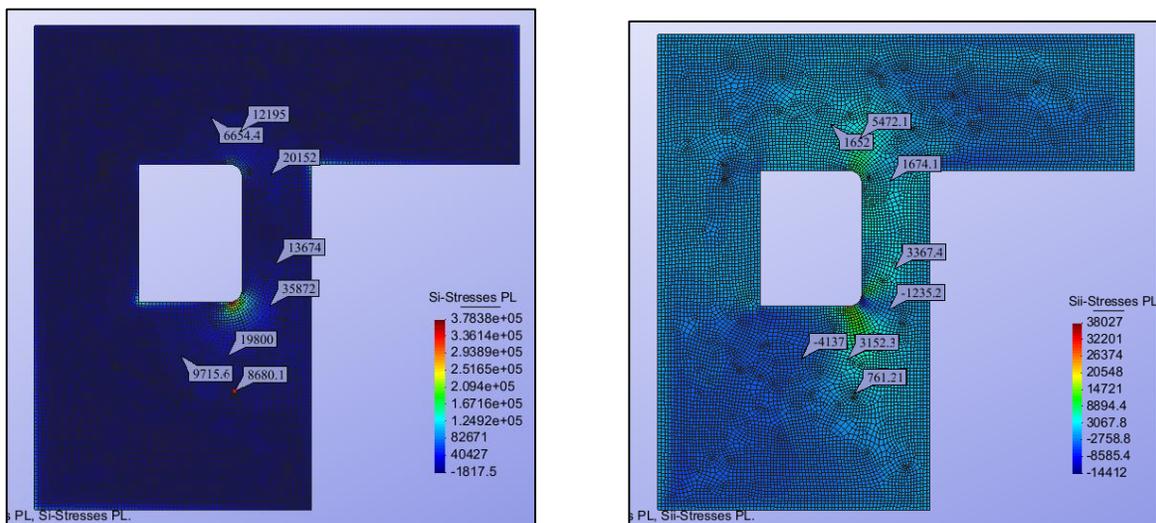


Figura 50 Tracciones y compresiones en la placa únicamente con peso propio. N/m^2

De la figura 50 se observa que las tracciones y compresiones generadas únicamente por el peso propio son menores a las que incluyen la carga distribuida. Por otro lado, las tensiones generadas tienen el mismo gradiente, y que son mayores alrededor de la abertura de la placa.

2.2 Conclusiones.

Del análisis se concluyó que la placa puede soportar hasta una máxima carga uniformemente distribuida de hasta 4 MPa para evitar que se generen tracciones o compresiones mayores a 30 MPa.

Sin embargo con ese valor de carga se tienen grandes desplazamientos en las zonas en la cual la placa no está apoyada, la solución sería bajar la carga o modificar las condiciones de contorno de la placa haciendo que todos sus lados estén apoyados.

3 Bibliography

- Oñate, E. (1995). Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis estático lineal. Barcelona, España.: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.