



INGENIERÍA DE ESTRUCTURAS
Máster en Ing. de Caminos, Canales y Puertos

TRABAJO FINAL L-37
PANTEÓN DE AGRIPA

Alberto Rodríguez Jiménez

Barcelona, 23 de enero de 2017

Introducción

Se quiere estudiar el comportamiento del panteón de Agripa bajo el efecto de su propio peso, y ver su coeficiente de seguridad frente a esta carga. Se considerará que la estructura falla si las tracciones superan 1.8 MPa o las compresiones 70 MPa en cualquier punto de la estructura o en la cúpula, respectivamente.

Para el estudio de este problema se ha modelado la estructura con los programas RamSeries 13.7.6.0 y GiD 13.0.1, usando el módulo de datos de estudio de sólidos 3D y de sólidos de revolución de RamSeries Educativa, respectivamente. Esta doble elección se debe a que se resolverá el problema primero bajo las hipótesis de los sólidos de revolución y, más tarde, se comparará esta solución con la obtenida en un modelado 3D, que renuncia a todas las hipótesis salvo la de material homogéneo de comportamiento elástico lineal. Otros enfoques, como el de lámina de revolución, quedan descartados por el ancho de la pared y la imposibilidad de modelar correctamente las uniones entre la pared y la cúpula.

El panteón puede representarse aproximadamente como el sólido generado por la revolución de la sección que se muestra en la Figura 1. La otra información necesaria para afrontar el problema es la caracterización del material, que se da también en la Tabla 1. Con todo esto es posible modelar la estructura, lo que se hará primero en 2D y luego en 3D.

Tabla 1. Propiedades del material

Propiedad	Valor	Unidades
E	$1.57 \cdot 10^{10}$	Pa
ν	0.18	-
γ	11760	N/m ³

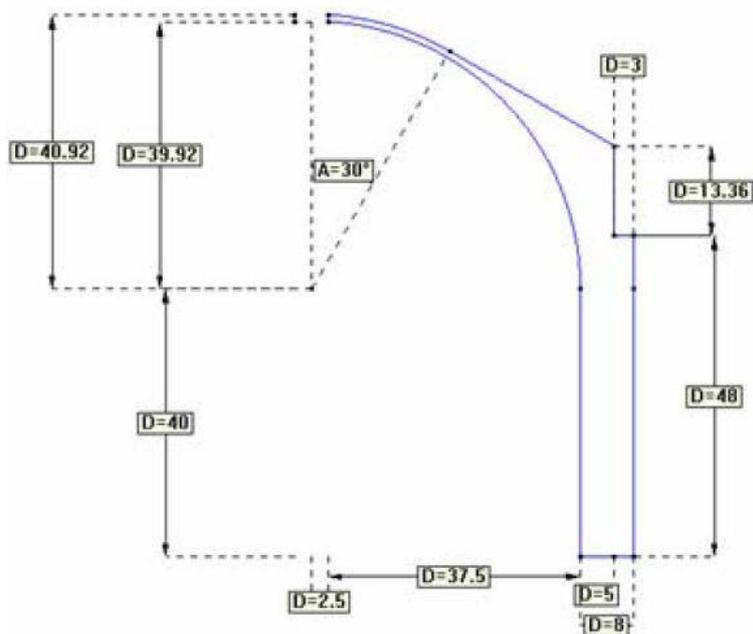


Figura 1. Media sección simétrica del panteón

Modelo de sólido de revolución

Modelado de la estructura

La sección descrita en la Figura 1 se ha reproducido en GiD. El resultado se muestra en la Figura 2. Cabe destacar que los puntos superiores de la izquierda no están alineados con el eje z, sino a 2.5 metros de él, lo que crea en la estructura real un hueco en la cúpula. Como consecuencia, esos dos puntos crean un borde libre en el que no será necesario imponer condiciones de contorno de simetría de revolución. Tan solo se considera que la base está empotrada. La modelización de la estructura acaba asignando las propiedades del material de la Tabla 1 a la superficie y asegurándonos de que GiD tenga en cuenta el peso propio en los cálculos.

El mallado de la estructura se ha refinado mediante un análisis de convergencia, siempre con elementos triangulares lineales. El criterio de convergencia es el desplazamiento vertical del punto superior de la sección. Las mallas son no estructuradas y se crean imponiendo un tamaño del elemento en la superficie. El análisis se ha realizado para mallas con tamaño 1, 0.5, 0.3 y 0.2. Como se aprecia en la Figura 3, hay un gran salto de coste computacional entre los tamaños 0.3 y 0.2, mientras que los desplazamientos varían en la décima de milímetro. Se considera pues que, aunque no se haya estabilizado completamente el desplazamiento vertical, la precisión es suficiente en la última malla y el análisis estructural se realizará con ella.

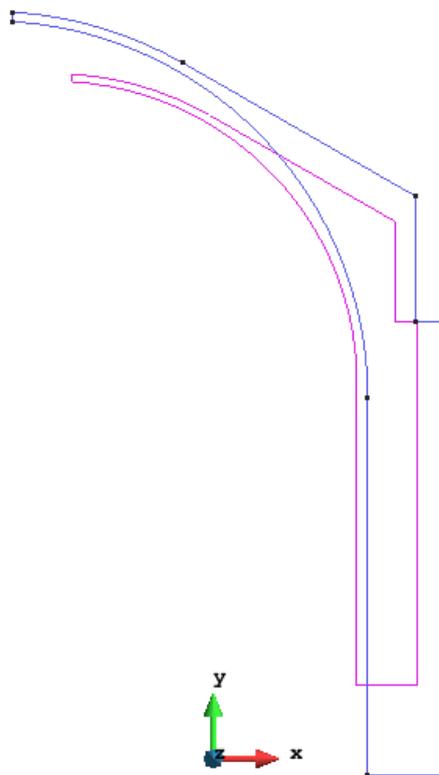


Figura 2. Esquematización 2D de la estructura

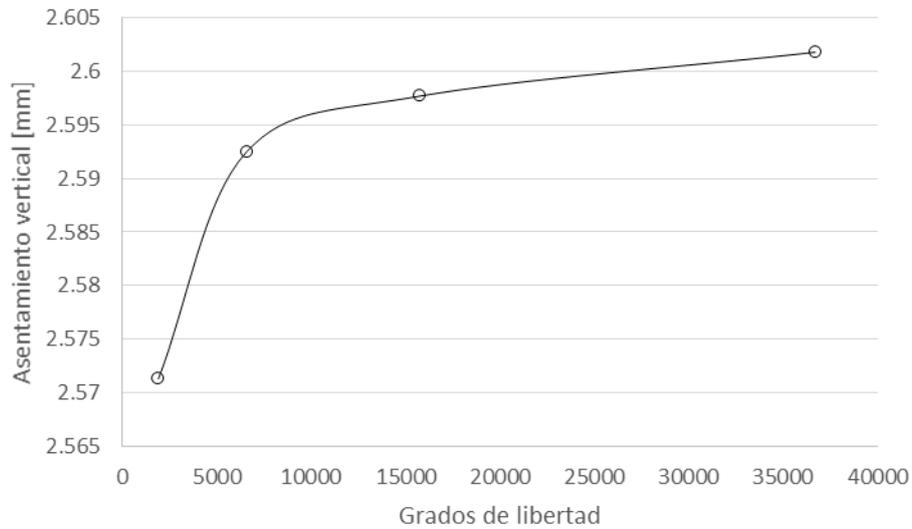


Figura 3. Análisis de convergencia del problema 2D

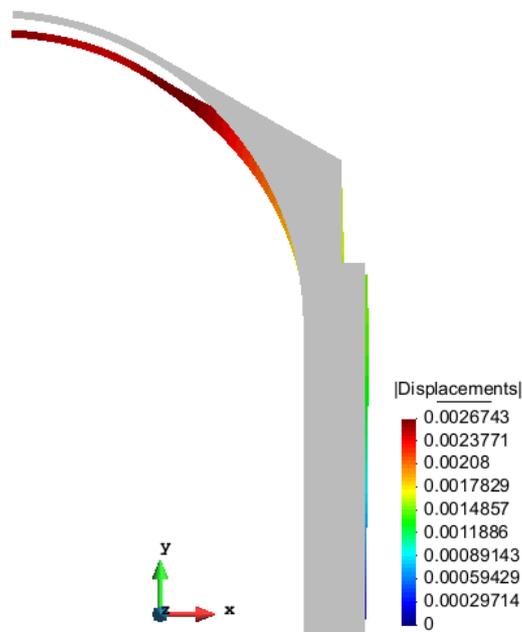


Figura 4. Deformada 2D

Comportamiento estructural

En primer lugar, observamos en la Figura 4 que las mayores deformaciones se producen en la cúpula, que es el elemento más delgado de la estructura. Este desplazamiento, que es mayormente vertical y descendiente, provoca que la pared del panteón se desplace hacia el exterior. Esta expansión es mayor en la unión entre la cúpula y la pared y se reduce gradualmente hasta que se anula en el empotramiento.

Las Figura 5 y Figura 6 muestran las tensiones principales mayores y menores, respectivamente. Las tracciones de mayor valor se concentran en la parte superior de la pared, junto a la cúpula, debido a la flexión originada por el desplazamiento de la cúpula. Estas tracciones se reducen conforme se desciende por la pared al ser contrarrestadas por el peso propio hasta que la zona cercana a la base trabaja solo a compresión.

Respecto a las tensiones principales menores, cabe destacar que son todas de compresión y que, como es de esperar, las mayores – en valor absoluto – se dan también cerca de la base, con una concentración de las mismas en la esquina exterior.

Coefficiente de seguridad frente al peso propio

Dado que no se tiene información para actuar de otro modo, se considera que el material se comporta como un material elástico lineal hasta las tensiones máximas admisibles. De este modo, las tensiones crecen linealmente con la carga y, como únicamente actúa el peso propio, basta ver cuánto margen hay entre las tensiones admisibles y las encontradas en la realidad. Los valores extremos de las tensiones hallados en la estructura son 0.19 MPa en tracción y 1.53 MPa a compresión, siempre muy lejos de los máximos admisibles en la estructura. Estos máximos se definen en la cúpula para las compresiones y en toda la estructura para las tracciones. Con estas consideraciones, los coeficientes de seguridad son:

$$CS_{tracción} = \frac{1.8}{0.11886} = 15.144$$

$$CS_{compresión} = \frac{70}{0.5106} = 137.094$$

El coeficiente de seguridad es mucho mayor para compresión porque, además de admitirse un valor mucho más elevado, solo se ha considerado la cúpula para su determinación. Si la limitación de 70 MPa aplicase a toda la estructura, este coeficiente sería:

$$CS_{compresión} = \frac{70}{1.5295} = 45.767$$

En cualquier caso, las tracciones son más restrictivas que las compresiones; por lo que el coeficiente de seguridad de la estructura frente al peso propio es 15.144.

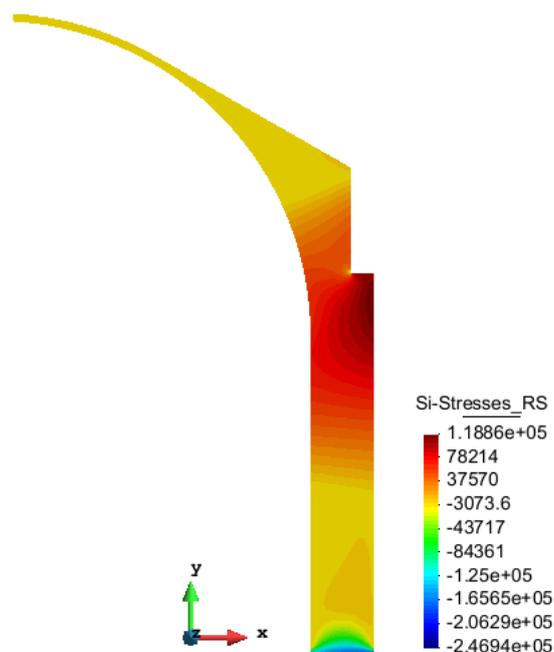


Figura 5. Tensiones principales mayores en 2D

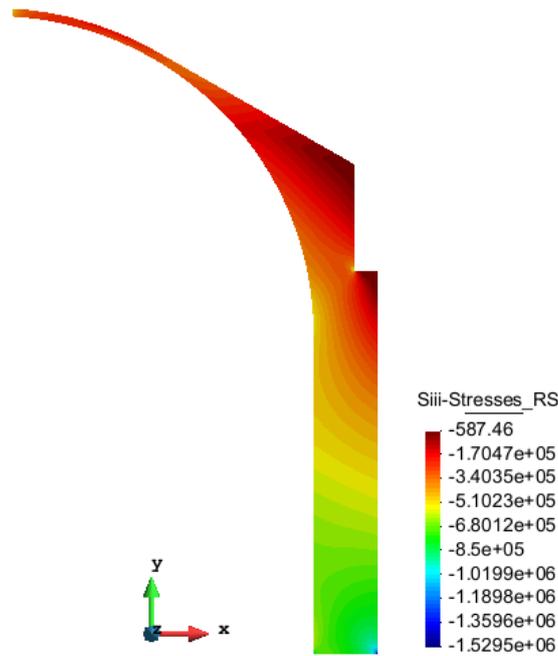


Figura 6. Tensiones principales menores en 2D

Modelo de sólido 3D

El modelado en 3D de la estructura agranda el tamaño del sistema lineal a resolver al tener que mallar un volumen en lugar de una superficie. Es por este motivo que en la construcción gráfica de la estructura se ha optado por aplicar condiciones de simetría y resolver únicamente para un cuarto de la misma. La esquematización de esta parte de la estructura se muestra en la izquierda de la Figura 7. Igualmente, para comprobar la veracidad de los resultados imponiendo las nuevas condiciones de contorno, se ha representado toda la estructura y se han comparado tensiones y desplazamientos en ambas. Un *render* de la estructura completa se muestra en la derecha de la Figura 7.

En dicha comparación se ha usado el mismo tamaño de malla máximo, 4.7, para ambas estructuras. Los resultados en desplazamientos y tensiones principales mayores se muestran en las Figura 8 y Figura 9, respectivamente. Como se aprecia en ellas, los resultados son prácticamente idénticos, con las pequeñas diferencias asociadas probablemente a la distinta forma del mallado en cada estructura. Como consecuencia, en lo sucesivo se usará únicamente la estructura reducida para condensar más el mallado.

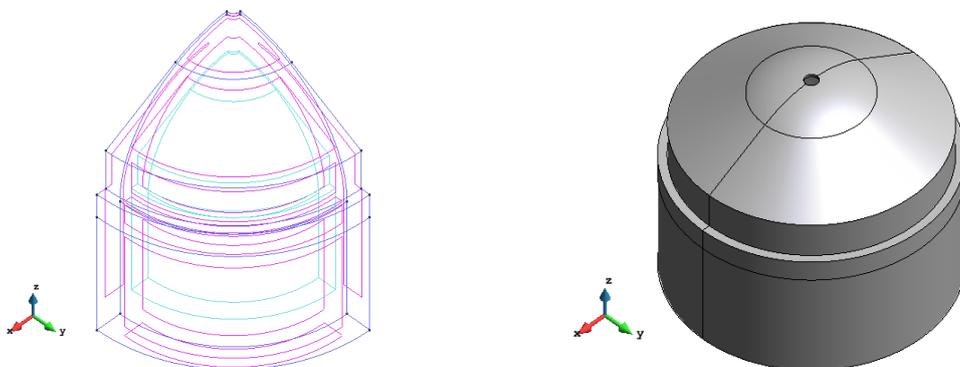


Figura 7. Esquematización 3D de la estructura. Izquierda: con simetría; derecha: sin simetría

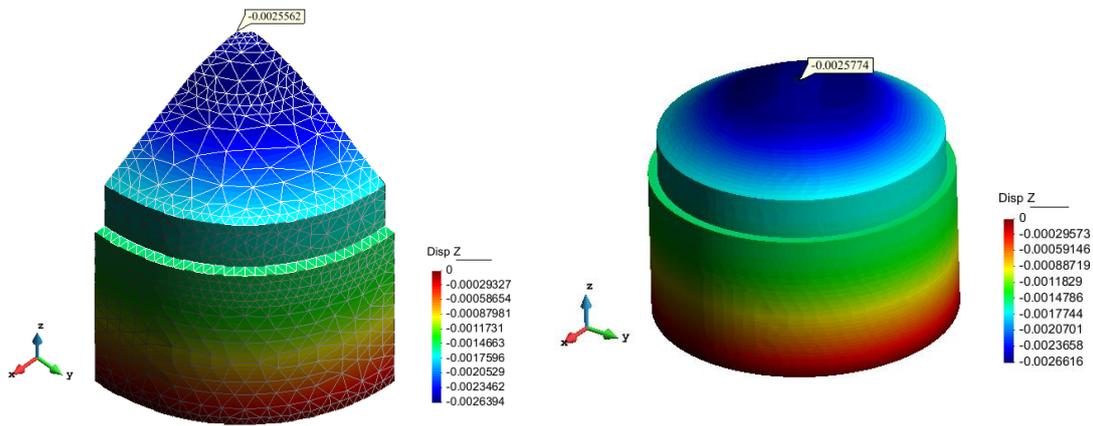


Figura 8. Comparación de desplazamientos verticales

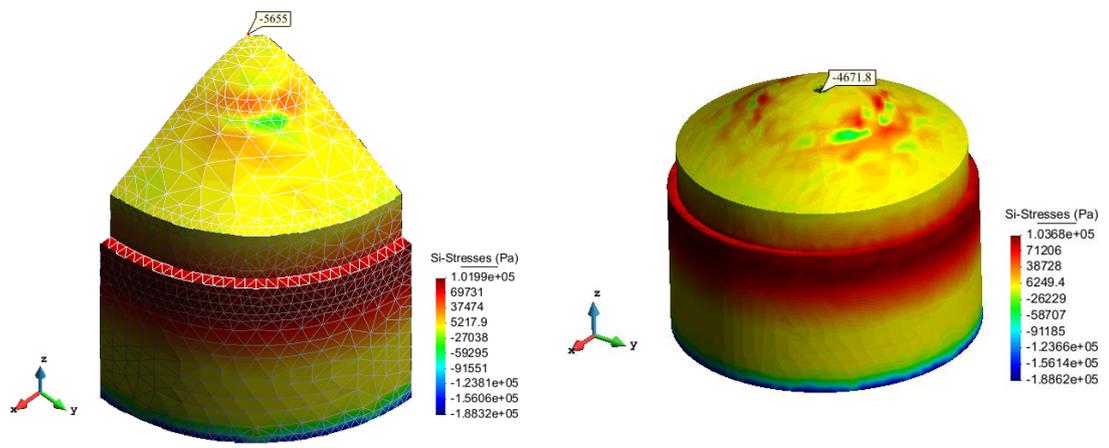


Figura 9. Comparación de tensiones principales mayores

Modelado de la estructura

Ahora que se ha justificado el modelado de la estructura como un cuarto de la misma, podemos centrarnos en detallar solo este caso, sin preocuparnos de la estructura completa. En primer lugar, cabe remarcar que vuelven a usarse los parámetros del material de la Tabla 1.

La estructura se ha dibujado extruyendo 90° la sección que se muestra en la Figura 2, habiendo rotado ésta para que estuviera incluida en el plano (x,z), y creando a partir de la extrusión un volumen al que se han asociado los parámetros de material anteriores. Debido a que no se ha completado el giro de 360°, es necesario imponer condiciones de contorno complementarias al empotramiento de la base. En particular, en el plano XZ se han bloqueado los desplazamientos en Y, y los giros θ_x y θ_z , aunque éstos no sean grados de libertad del elemento tridimensional. En el plano YZ se han bloqueado, en cambio, el movimiento en X y los giros θ_y y θ_z . Todas las condiciones se han impuesto en las superficies y líneas correspondientes. Por último, la única carga actuante, el peso propio, se aplica directamente a todo el volumen.

Para el mallado se han usado elementos tetraédricos de 4 nodos. Para ver su tamaño definitivo en la estructura se ha realizado un análisis de convergencia en los desplazamientos verticales del punto destacado en la Figura 8. Los resultados del mismo se muestran en la Figura 10 y, como se puede apreciar, no se llega a convergencia con la última malla probada, que corresponde a un tamaño máximo del elemento de 0.9. Sin embargo, mallas más finas no se han podido probar por falta de memoria en el cálculo y, en consecuencia, será esta última la usada para estudiar la estructura.

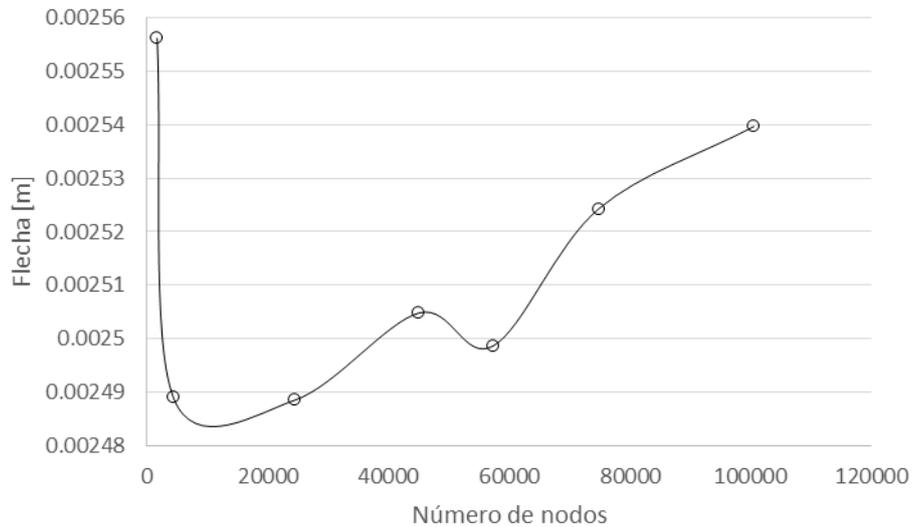


Figura 10. Convergencia del mallado

Comportamiento estructural

En primer lugar, la Figura 11 muestra los desplazamientos totales en la estructura y los pone en referencia a la configuración inicial, con un factor de magnificación de 958. Como es lógico, la cúpula es el elemento que más se deforma, principalmente en la dirección vertical. La influencia de este desplazamiento provoca una flexión en la pared, por lo que ésta se desplaza ligeramente hacia el exterior. Este desplazamiento se reduce progresivamente hasta que se anula en el empotramiento.

Las Figura 12 y Figura 13 muestran las tensiones principales mayores y menores respectivamente. Destaca que las mayores tracciones se den en la parte superior de la pared vertical, como es lógico debido a la carga excéntrica que la cúpula, al hundirse, transmite a la pared. Conforme desciende la altitud en la pared, estas tracciones decrecen hasta que solo aparecen compresiones, de valor mayor en el empotramiento que las tracciones máximas. En la cúpula, por el contrario, se alternan tracciones y compresiones, como se ve en la Figura 14.

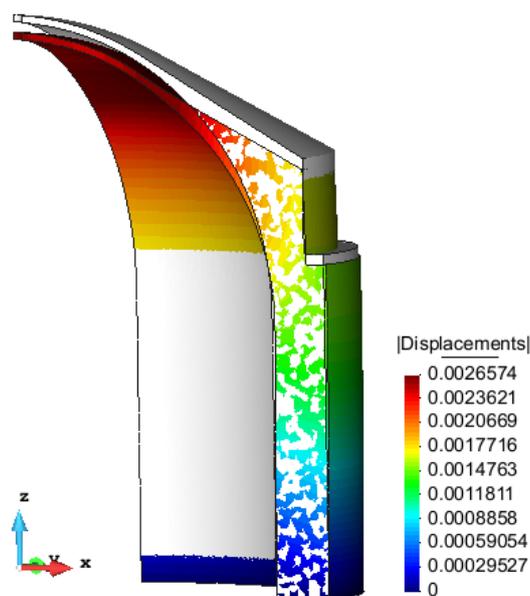


Figura 11. Deformada

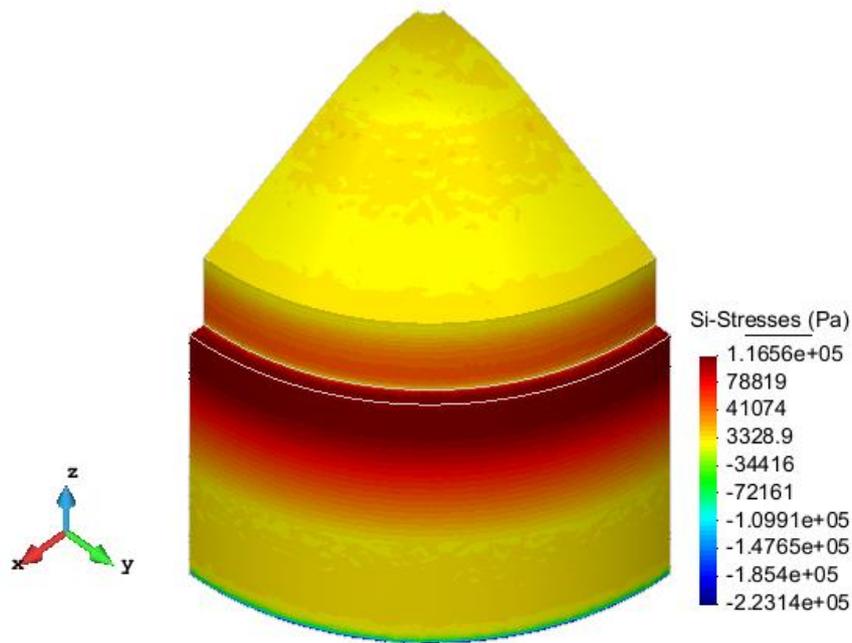


Figura 12. Tensiones principales mayores

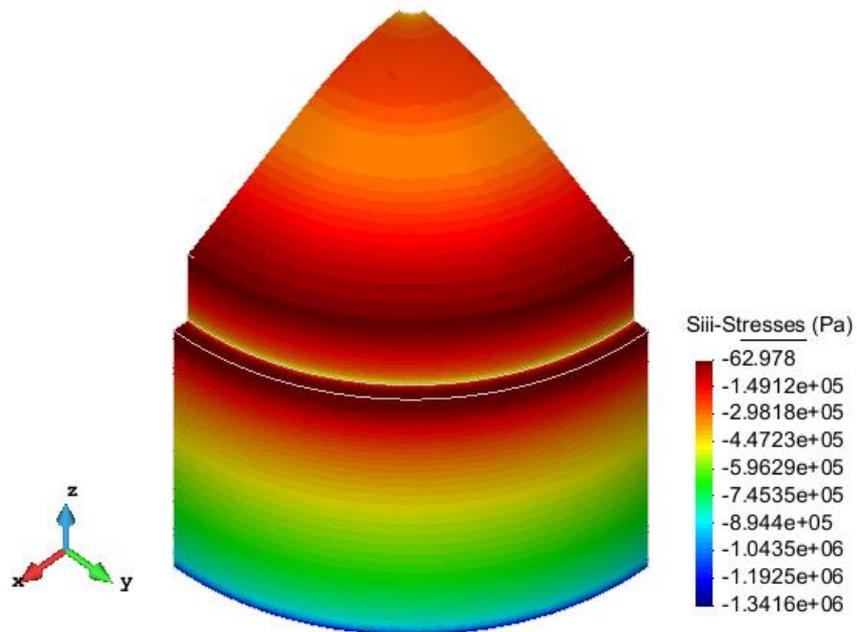


Figura 13. Tensiones principales menores

Respecto a las tensiones menores, se aprecia que todas son de compresión. Nuevamente, y como parece lógico, los valores mayores de éstas se encuentran en la base del templo. En cualquier caso, tanto las tensiones principales menores como las mayores son pequeñas respecto a los valores máximos admitidos. En concreto, la mayor tracción es de 0.116 MPa, mientras que la mayor compresión es de 1.342 MPa. Ambos valores están lejos de los máximos admisibles, por lo que se procede ahora a la determinación del coeficiente de seguridad al peso propio.

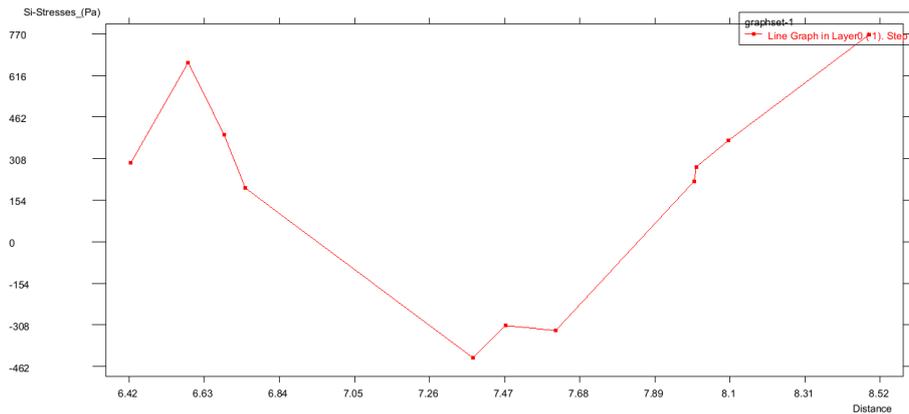


Figura 14. Tensiones principales mayores en una generatriz de la cúpula

Coefficiente de seguridad frente al peso propio

Haciendo esto para tensiones y tracciones:

$$CS_{tracción} = \frac{1.8}{0.11656} = 15.443$$

$$CS_{compresión} = \frac{70}{0.44723} = 156.519$$

El coeficiente de seguridad a compresión tiene un valor tan elevado porque se ha tomado el valor máximo de las compresiones en la cúpula, que es lo que se ha entendido como “chapa” en el enunciado. Si en lugar se tomase esta restricción en toda la estructura, su valor sería:

$$CS_{compresión} = \frac{70}{1.3416} = 52.177$$

El valor final del coeficiente de seguridad será el menor entre los de tracción y compresión. Por lo tanto, el coeficiente de seguridad de la estructura frente al peso propio es 15.443.

Conclusiones

Es interesante comparar los valores del CS obtenidos con ambos modelos de la estructura, lo que se hace en la Tabla 2. De esta comparación se puede extraer que la estructura parece más segura cuando se estudia como sólido 3D, aunque la diferencia es pequeña; el CS en 3D es el 101.91% del valor en 2D. Hay que tener en cuenta también que el tamaño del elemento 3D es mayor que en 2D al aumentar la dimensión del problema, por lo que es probable que las tensiones en el caso 3D pudieran crecer y reducir esta diferencia si se mallase con elementos más pequeños.

Respecto al valor del CS en sí, se ve que es muy alto. La estructura real estará sometida a cargas adicionales al peso propio pero, dada su envergadura, éste es seguramente la carga más importante que la estructura debe aguantar. Se puede concluir que la estructura está sobredimensionada respecto a los estándares de diseño actuales.

Tabla 2. Resumen de coeficientes de seguridad

Modelo	CS _{tracción}	CS _{compresión cúpula}	CS _{compresión}	CS
2D	15.144	137.094	45.767	15.144
3D	15.443	156.519	52.177	15.433