

# INGENIERÍA DE ESTRUCTURAS

---

MCCP CURSO 2014 - 2015

## TRABAJO DEL CURSO

---

L-55 PLACA PLANA CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA

DAVID BALLESTER RAMÍREZ

46977872G



# ÍNDICE TRABAJO

## ÍNDICE PROBLEMA L-55

### Placa plana con carga uniformemente repartida

<b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>4</b>
<b>2. OBJETIVO</b> .....	<b>4</b>
<b>3. ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN</b> .....	<b>4</b>
<b>4. GEOMETRÍA Y MATERIALES</b> .....	<b>5</b>
<b>5. CONDICIONES DE CONTORNO</b> .....	<b>5</b>
<b>6. MALLADO Y ELEMENTOS FINITOS</b> .....	<b>6</b>
<b>7. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA</b> .....	<b>7</b>
7.1 Condiciones.....	7
7.2 Consideraciones adicionales - Concentración de tensiones .....	7
7.3 Resultados numéricos .....	8
7.4 Resultados gráficos de convergencia.....	8
7.4.1 Máximas tensiones de tracción - $S_i$ .....	8
7.4.2 Máximas tensiones de compresión - $S_{iii}$ .....	9
7.5 Conclusiones del análisis de convergencia .....	9
<b>8. SUAVIZACIÓN DE ESQUINAS. COMPARATIVA PARA EL TRATAMIENTO DE CONCENTRACIÓN DE TENSIONES</b> .....	<b>9</b>
8.1 Resultados con suavización .....	10
<b>9. CÁLCULO DE LA CARGA CRÍTICA</b> .....	<b>11</b>
9.1 Regresión lineal de las tensiones de tracción en función de la carga .....	11
9.2 Regresión lineal de las tensiones de compresión en función de la carga .....	12
9.3 Conclusiones de carga crítica .....	12

---

<b>10. RESULTADOS GRÁFICOS BAJO PESO PROPIO Y CARGA MÁXIMA ADMISIBLE (<math>q_{\max}</math>) CON ELEMENTOS CLLL .....</b>	<b>13</b>
<b>10.1 Desplazamientos en Z - Flechas.....</b>	<b>13</b>
<b>10.2 Rotaciones .....</b>	<b>13</b>
<b>10.3 Tensiones de compresión - <math>S_{iii}</math> .....</b>	<b>13</b>
<b>10.4 Tensiones de tracción - <math>S_i</math> .....</b>	<b>14</b>
<b>11. CONCLUSIONES .....</b>	<b>14</b>
<b>12. ASPECTOS TEÓRICOS DE LOS ELEMENTOS PLANOS DE REISSNER-MINDLIN PARA PLACAS DELGADAS .....</b>	<b>15</b>
<b>12.1 Campo de desplazamientos.....</b>	<b>15</b>
<b>12.2 Campo de deformaciones y tensiones.....</b>	<b>15</b>
<b>12.3 Esfuerzos y deformaciones generalizadas .....</b>	<b>16</b>
<b>12.4 Discretización del campo de movimientos - PTV .....</b>	<b>17</b>
<b>12.5 Obtención matriz de rigidez.....</b>	<b>17</b>
<b>12.6 Consideración de bloqueo por cortante.....</b>	<b>18</b>

## PROBLEMA L-55

### Placa plana con carga uniformemente repartida

#### 1. INTRODUCCIÓN

Se estudiará el comportamiento de una placa de hormigón armado bajo carga uniformemente distribuida con dos de sus seis lados empotrados. La estructura es no simétrica en todas direcciones, así como las condiciones de contorno.

Se trata de una placa de pequeño espesor, ya que la relación entre el espesor y el ancho es menor a 0.05. Su espesor es de 0.25 m y su longitud menor de 10 m ( $t/L = 0.25/10 = 0.025 < 0.05$ ).

La placa tiene una zona que trabaja en voladizo y dos empotramientos de longitudes dispares. En resumen, en cuanto a geometría y respuesta bajo cargas uniformes, la placa presentará, presumiblemente, un comportamiento totalmente asimétrico.

#### 2. OBJETIVO

El objetivo de la práctica es determinar la carga crítica que podrá soportar la estructura sin que en ninguno de sus puntos se superen valores máximos de compresión y/o tracción, impuestos por el enunciado. Dichos valores son,

- Máxima compresión admisible: 12 MPa
- Máxima tracción admisible: 20 MPa

Aunque un hormigón estándar es capaz de resistir fácilmente del orden de 30 MPa, los 12 MPa de restricción a compresión se determinan tras la aplicación de un factor de seguridad, que minimiza la capacidad resistente del material. Se puede realizar el razonamiento análogo con la capacidad resistente a tracción del acero. De esta forma, se explica la restricción a valores, aparentemente tan pequeños, de tracciones y compresiones.

#### 3. ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN

Para resolver este problema se usará el módulo de cálculo RamSeries con el problem-type *PLATES*. Este módulo nos permitirá aplicar la teoría de placas de Reissner-Mindlin así como elementos finitos planos 2D.

Dado que el cálculo se realizará en régimen lineal elástico, el cálculo de la máxima carga admisible se encontrará mediante una regresión lineal entre dos valores máximos de tracción y compresión para los casos de peso propio y peso propio + carga arbitraria. La carga arbitraria inicial será uniformemente distribuida, y su valor dependerá de las tensiones generadas, que deberán ser del orden de magnitud de los valores máximos admisibles.

En apartados posteriores, se demostrará que una carga inicial de  $100.000 \text{ N/m}^2$  genera tensiones del orden de decenas de MPa.

#### 4. GEOMETRÍA Y MATERIALES

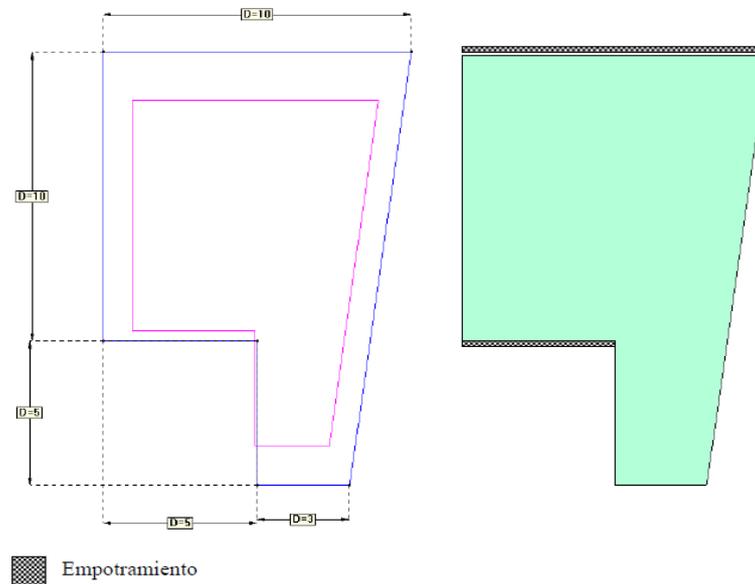


FIGURA 1. Geometría estructural de la placa

Para los materiales, se han usado los valores establecidos por defecto en el programa RamSeries. Ya que no se explicita la distribución de armaduras en la placa ni su cantidad, se considerará a efectos del cálculo del peso propio que la estructura está conformada únicamente de hormigón en masa. Esta suposición es razonable ya que la contribución de la armadura al peso de la placa es pequeña. Así pues, las características del hormigón usado serán,

- Modulo de young,  $E = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
- Poisson,  $\nu = 0.2$
- Peso específico,  $\gamma_H = 25000 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$
- Espesor,  $t = 0.25 \text{ m}$

#### 5. CONDICIONES DE CONTORNO

En la teoría de placas de Reissner-Mindlin, el hecho de introducir un giro adicional de la sección transversal respecto a la deformada de la fibra media permite desacoplar los giros de las flechas. En este caso, por lo tanto, tendremos 3 grados de libertad en cada nodo de un elemento plano de Reissner-Mindlin. Para imponer un empotramiento en los lados de la placa que se muestran en la FIGURA 1 se deberán prescribir todos los movimientos posibles. Dichos movimientos prescritos son,

$$\mathbf{u}_{\text{empotramiento}} = \{w = 0; \theta_x = 0; \theta_y = 0\}$$

Aplicados en los contornos empotrados de la estructura.

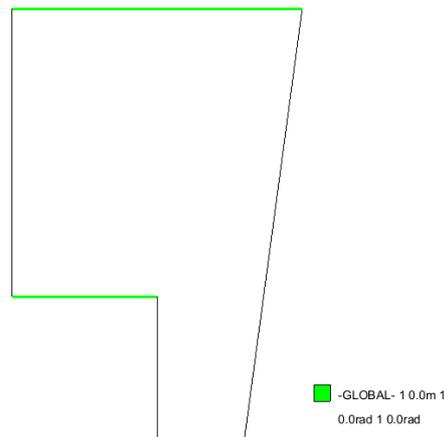


FIGURA 2. Condiciones de contorno. Empotramientos

## 6. MALLADO Y ELEMENTOS FINITOS

Para determinar que tamaño de malla ofrece las mejores prestaciones para el cálculo teniendo en cuenta el coste computacional y la precisión, se deberá realizar un análisis de convergencia.

En este caso se ha optado por utilizar elementos CLLL (cuadriláteros lineales). Se conoce a priori que los elementos CLLL tienen un muy buen comportamiento para la aproximación de tensiones ya que se realizó el estudio de convergencia para estos en la práctica 3 de esta asignatura. En este caso, no interesa conocer el valor de los desplazamientos verticales puesto que lo que se está intentando estimar, es una carga crítica que genere tensiones acotadas superiormente. Para esto, no es necesario el cálculo de flechas, y por lo tanto, no se realizará.

Por lo tanto, los resultados de desplazamientos no se realizarán en este ejercicio. Y para la aproximación de la carga crítica, se usaran elementos CLLL como ya se ha comentado.

Se considera que la geometría es suficientemente regular, y el problema suficientemente sencillo y computacionalmente asequible como para usar una malla no estructurada y que el propio algoritmo de generación malle de forma cuasi-estructurada con relaciones de forma de elementos cercanos a la unidad. Las mallas usadas en el análisis de convergencia tienen un aspecto como se muestra en la FIGURA 3,

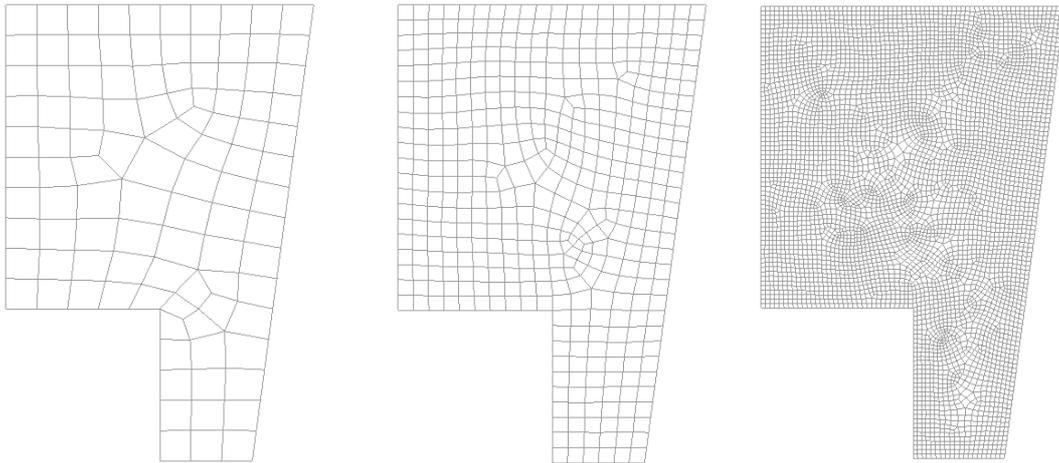


FIGURA 3. Mallado con elementos CLLL de tamaño ( $s=1$ ,  $s=0.5$ ,  $s=0.15$ )

## 7. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA

### 7.1 Condiciones

El análisis se ha realizado bajo la carga del peso propio, sin carga exterior aplicada. La dirección de la gravedad se ha considerado positiva en dirección  $(0,0,-1)$ .

### 7.2 Consideraciones adicionales - Concentración de tensiones

Como se puede apreciar en la FIGURA 3, existe un codo de concentración de tensiones en el que los valores de estas aumentaran de forma proporcional al refinamiento de la malla. Para el tratamiento de este problema, se cogerán los valores de los nodos colindantes de dicho punto de concentración. De esta forma, se obtendrán resultados convergentes para las tensiones principales de estudio  $S_i$  y  $S_{iii}$ .

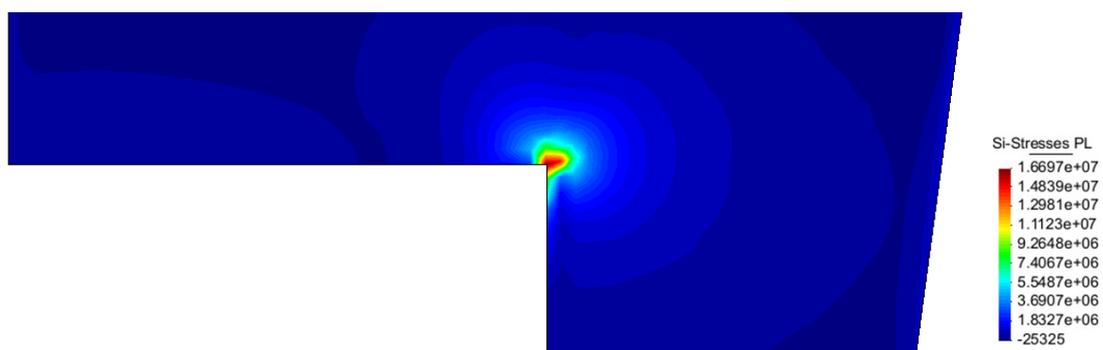


FIGURA 4. Tensiones principales de tracción ( $S_i$ )

Este tratamiento se empleará para el cálculo de la tensión máxima admisible. Es decir, se tomará como real, la tensión máxima en los puntos próximos a la esquina y no sobre ella. Este procedimiento tiene el inconveniente que a mayor refinamiento, la distancia de verosimilitud hasta el codo disminuye, complicando así la elección de los nodos a considerar en cada iteración del análisis de convergencia.

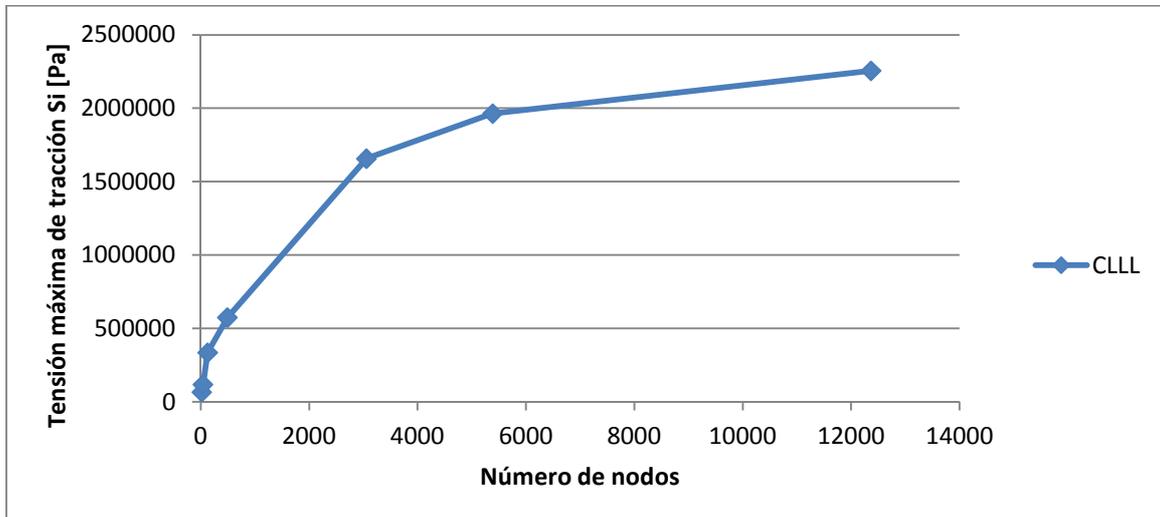
### 7.3 Resultados numéricos

Tabla 1. Resultados del análisis de convergencia para elementos CLLL

CLLL					
Elem. Size	Nelem	Nnode	DOF	Si (máx. tracción)	Siii (max. compresión)
3	11	20	60	67041	-24779
2	29	42	126	1,19E+05	-37170
1	103	128	384	3,36E+05	-2,01E+05
0,5	444	493	1479	5,75E+05	-3,93E+05
0,2	2936	3058	9174	1,66E+06	-9,83E+05
0,15	5225	5387	16161	1,97E+06	-1,58E+06
0,1	12126	12368	37104	2,26E+06	-1,58E+06

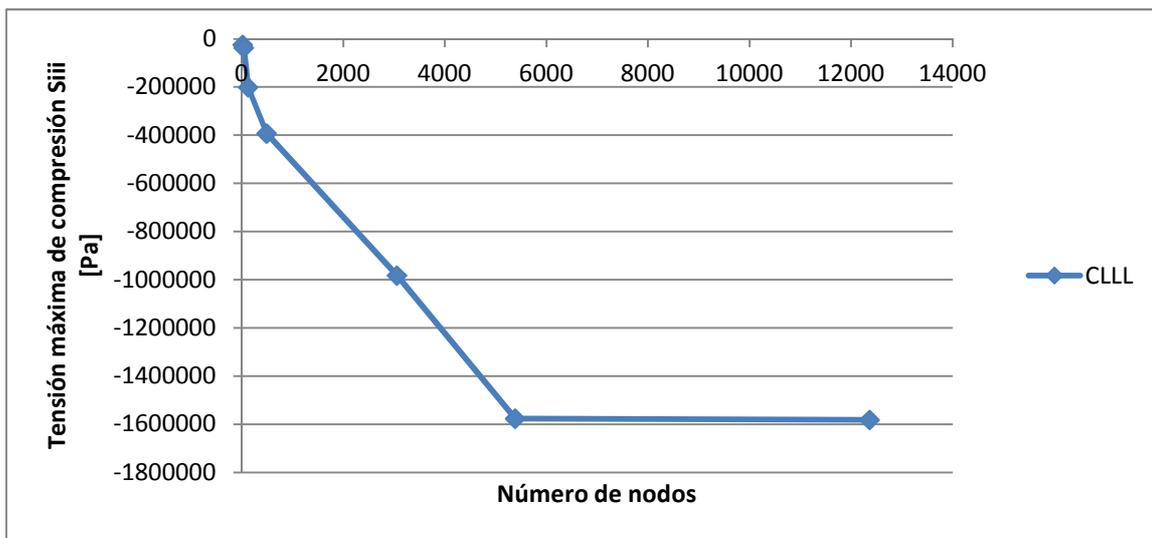
### 7.4 Resultados gráficos de convergencia

#### 7.4.1 Máximas tensiones de tracción - Si



Gráfica 1. Resultados de convergencia de tensiones máximas de tracción en Pa

### 7.4.2 Máximas tensiones de compresión - Siii



Gráfica 2. Resultados de convergencia de tensiones máximas de compresión en Pa

## 7.5 Conclusiones del análisis de convergencia

Se observa una clara tendencia a la convergencia para elementos CLLL. La aproximación de tensiones de tracción presenta un desarrollo más lento que las de compresión. Es destacable que los valores de tracción son algo superiores que los de compresión, aunque esto no es extremadamente relevante o inusual ya que la carga es uniformemente distribuida y dicha diferencia puede venir ocasionada simplemente por la geometría y las condiciones de contorno de la estructura naturalmente.

Por lo tanto, el comportamiento de la placa bajo su propio peso induce los siguientes resultados,

- Máxima tensión de tracción bajo peso propio, Si:  $2,26 \cdot 10^6$  Pa
- Máxima tensión de compresión bajo peso propio, Siii:  $-1,58 \cdot 10^6$  Pa

## 8. SUAVIZACIÓN DE ESQUINAS. COMPARATIVA PARA EL TRATAMIENTO DE CONCENTRACIÓN DE TENSIONES

Dado que el correcto cálculo de las tensiones máximas de compresión y tracción es de vital importancia para la estimación de la carga crítica, en este apartado se pretende dar verosimilitud a los resultados del análisis de convergencia del punto 7. Para ello, se ha realizado el cálculo de la placa sometida a su peso propio con la esquina en la que se encuentran las concentraciones de tensiones suavizada. Es decir, se ha generado un cuarto de circunferencia de radio 0.2 m para suavizar dicho punto. A continuación se ha generado una malla con elementos CLLL y tamaño de elemento 0.1 m con las condiciones de contorno correspondientes,

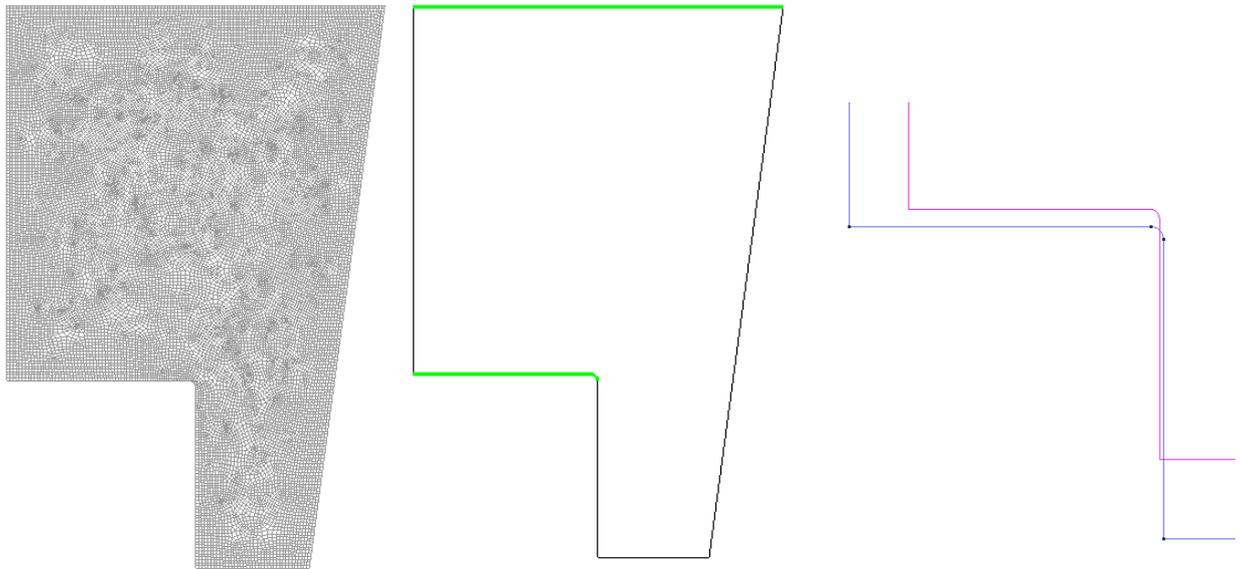


FIGURA 5. Malla, condiciones de contorno y detalle geométrico para la placa con esquina suavizada

### 8.1 Resultados con suavización

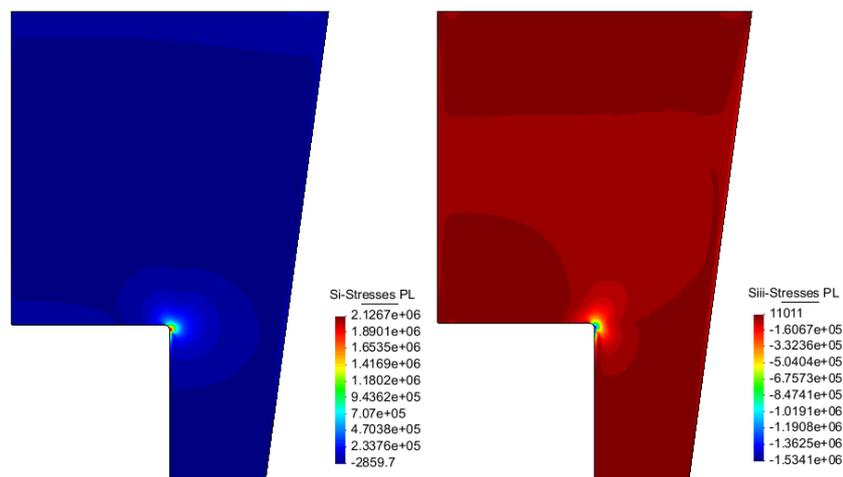


FIGURA 6. Tensiones máximas de tracción y compresión

En este caso se observa que las tensiones máximas resultantes han sido,

- Máxima tensión de tracción bajo peso propio, Si:  $2,1267 \cdot 10^6$  Pa
- Máxima tensión de compresión bajo peso propio, Siii:  $-1.53 \cdot 10^6$  Pa

Se comprueba así que los valores resultantes para la esquina suavizada son muy parecidos a los tomados en el apartado anterior, en que los nodos colindantes fueron considerados como creíbles.

Es apreciable una concentración de tensiones existentes en la zona suavizada, esta concentración se explica de forma sencilla. Si se observa la respuesta estructural de la placa en giros, como se muestra en el apartado 10, se aprecia una concentración de giros alrededor de este punto que genera una concentración de tensiones. La conclusión es, entonces, que la placa sufre de concentración de tensiones de forma natural a causa de su geometría y que, suavizando dicha esquina, no se elimina este fenómeno pero se

obtiene el valor de la tensión debido a una causa física real sin el añadido del error debido a que el método de elementos finitos sufre de concentración de tensiones en zonas con geometrías abruptas.

## 9. CÁLCULO DE LA CARGA CRÍTICA

En este apartado se determinará la carga crítica que cumple con las dos restricciones de tensión que se han impuesto. Se trata de un problema de optimización de diseño que tiene la siguiente forma,

$$\max\{q_c ; q_t\}$$

$$t. q. \begin{cases} S_i \leq 20 \text{ MPa} \\ S_{iii} \leq 12 \text{ MPa} \end{cases}$$

Es decir, se calcularán dos cargas críticas,  $q_c$  y  $q_t$ , que cumplan los criterios de tensión de compresión ( $S_{iii}$ ) y tensión de tracción ( $S_i$ ) respectivamente.

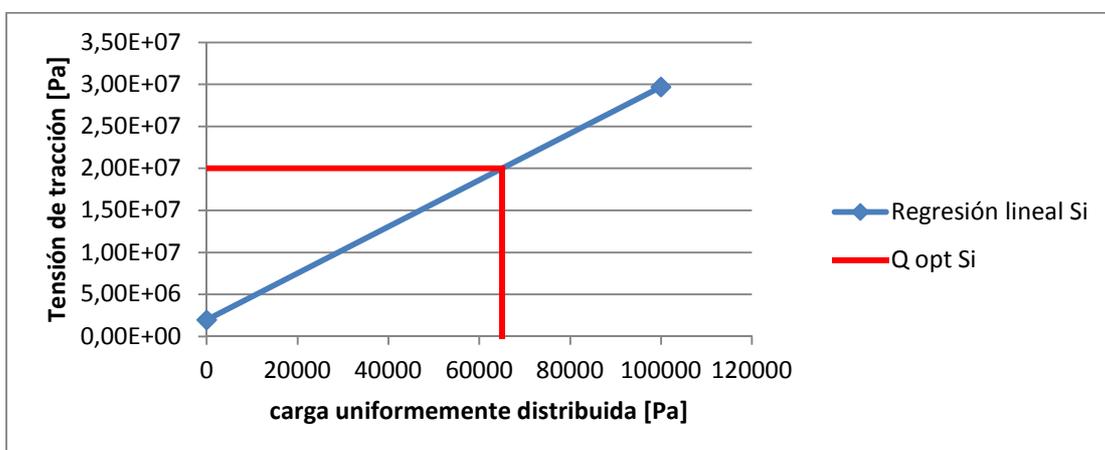
En primer lugar se calcula la respuesta de la placa bajo su peso propio y una carga uniformemente distribuida de  $100.000 \text{ N/m}^2$  con elementos CLLL. En este caso, resulta que las tensiones máximas de compresión y de tracción son respectivamente,

- Tracción máxima bajo  $q = 100.000 \text{ N/m}^2$  y peso propio:  $29.688 \text{ MPa}$
- Compresión máxima bajo  $q = 100.000 \text{ N/m}^2$  y peso propio:  $-23.822 \text{ MPa}$

Estos valores superan los máximos admisibles. Como se ha explicado en el apartado 3, se aproximará una carga crítica que cumpla criterios de compresión y otra que cumpla criterios de tracción mediante una regresión lineal entre los puntos de carga igual a  $0 \text{ Pa}$  y carga igual a  $100.000 \text{ Pa}$ .

El resultado de esta regresión lineal se muestra en las siguientes gráficas.

### 9.1 Regresión lineal de las tensiones de tracción en función de la carga



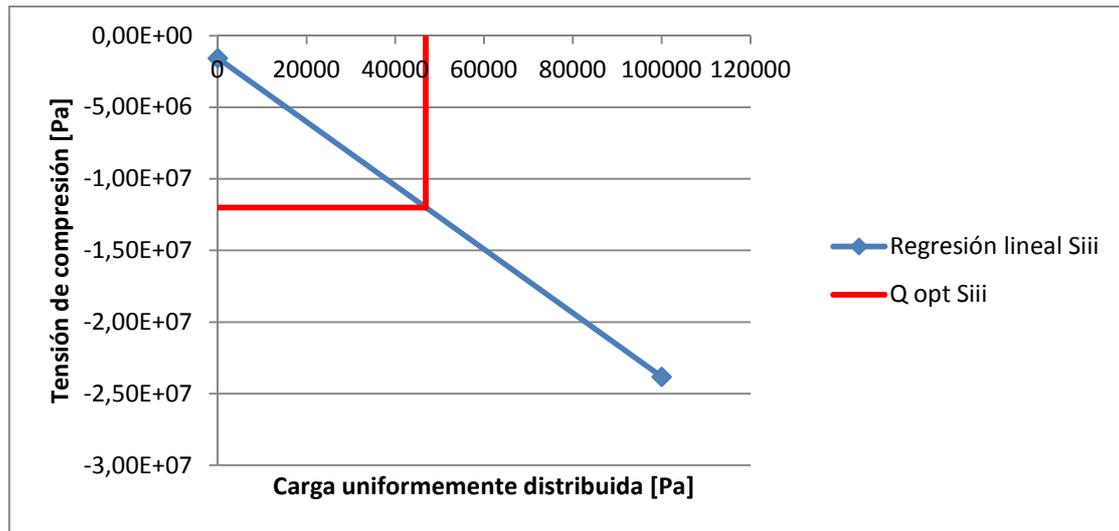
Gráfica 3. Relación entre la tensión máxima de tracción y la carga aplicada

Se observa que la carga crítica en la que las tracciones máximas alcanzan el valor de 20 MPa es,

$$q_t = 65054,287 \frac{N}{m^2}$$

Esta carga  $q_t$  implica el agotamiento de la estructura por tracción.

## 9.2 Regresión lineal de las tensiones de compresión en función de la carga



Gráfica 4. Relación entre la tensión máxima de compresión y la carga aplicada

Se observa que la carga crítica en la que las compresiones máximas alcanzan el valor de 12 MPa es,

$$q_c = 46856,429 \frac{N}{m^2}$$

Esta carga  $q_c$  implica el agotamiento de la estructura por tracción.

## 9.3 Conclusiones de carga crítica

Dado que las restricciones en el problema de optimización son de menor o igual, la carga crítica más restrictiva es la que agota el criterio resistente a compresión, por ser esta menor. Por lo tanto, la carga crítica que podrá soportar la placa sin que ninguna de sus tensiones supere ni los valores de tracción ni los valores de compresión establecidos en el enunciado es,

$$q_{max} = \min\{q_t, q_c\} = q_c = 46856,429 \frac{N}{m^2}$$

**10. RESULTADOS GRÁFICOS BAJO PESO PROPIO Y CARGA MÁXIMA ADMISIBLE ( $q_{max}$ ) CON ELEMENTOS CLLL**

**10.1 Desplazamientos en Z - Flechas**

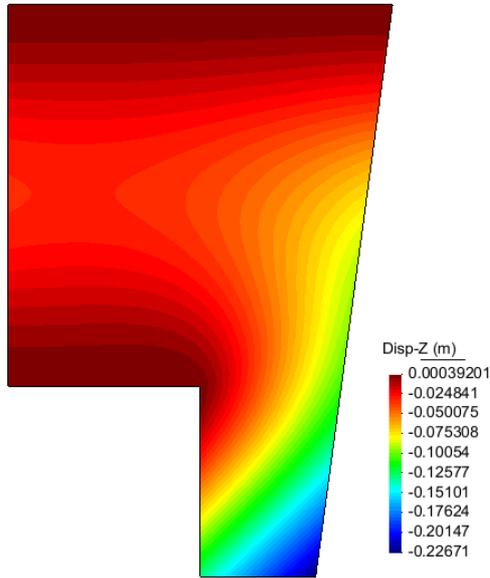


FIGURA 7. Desplazamientos verticales

**10.2 Rotaciones**

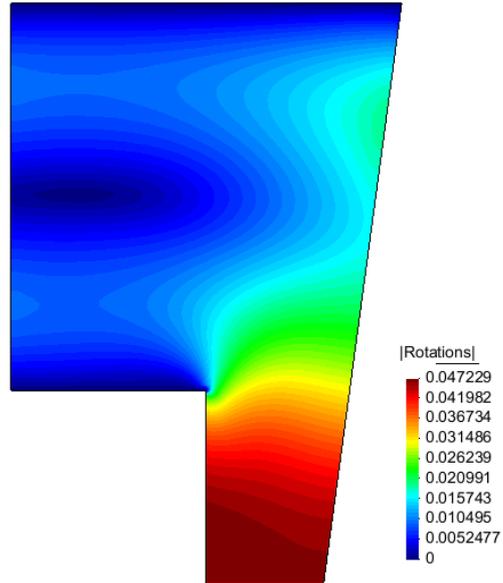


FIGURA 8. Rotaciones en valor absoluto

**10.3 Tensiones de compresión -  $S_{iii}$**

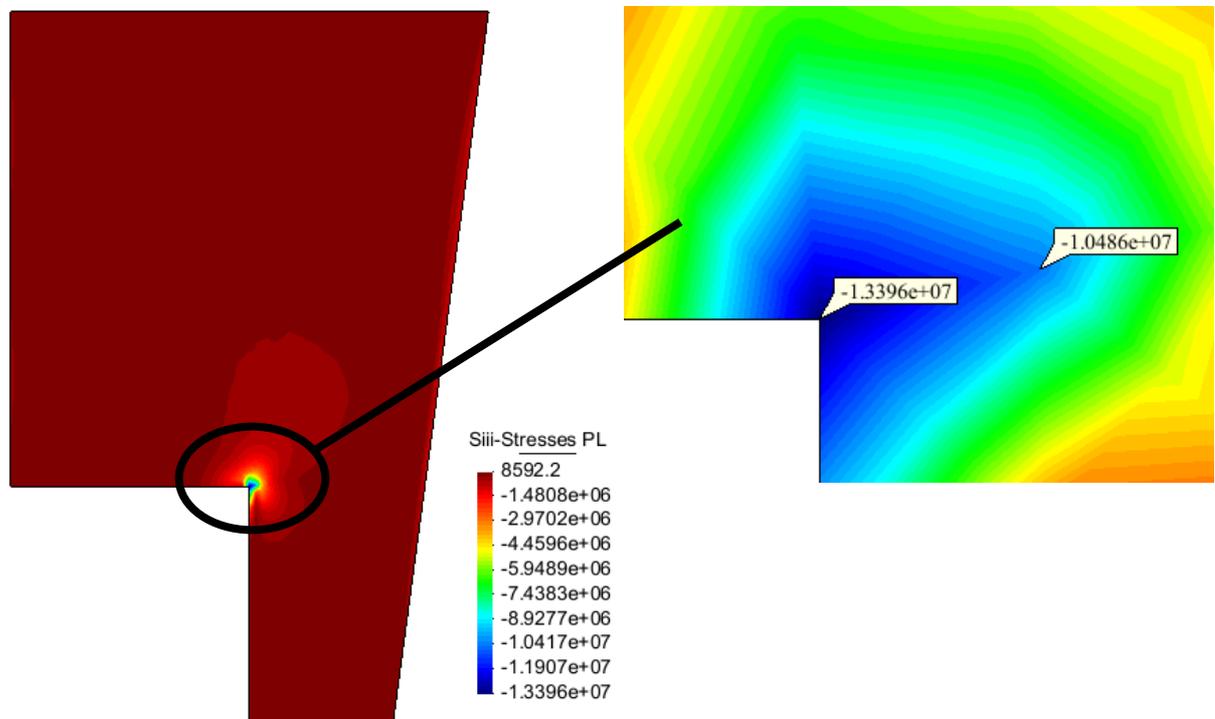


FIGURA 9. Tensiones de compresión [Pa]

En el punto medio entre los dos valores representados en la ampliación del codo se encuentra el valor límite de 12 MPa.

#### 10.4 Tensiones de tracción - $S_i$

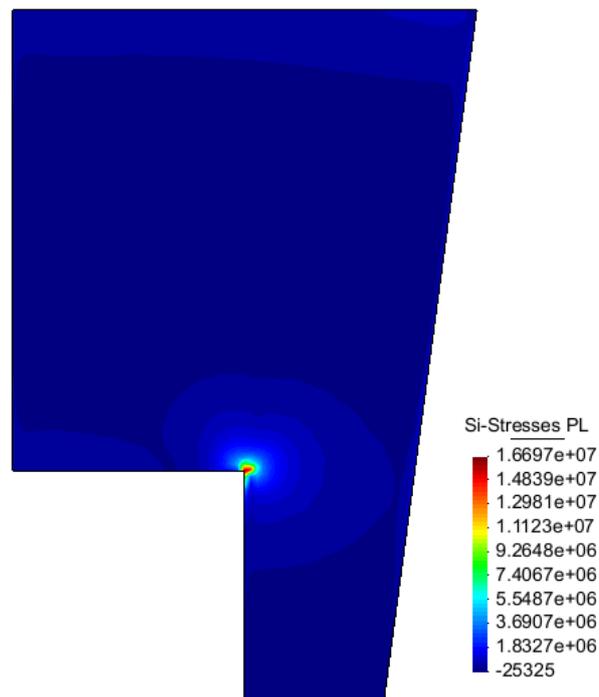


FIGURA 10. Tensiones de tracción [Pa]

Se observa que la máxima tracción en este caso tiene un valor de 16.697 MPa, menor a los 20 MPa que se habían impuesto como límite en el enunciado, por lo tanto, queda demostrado que la carga usada en este apartado 9 cumple con ambos criterios de tensiones máximas. Si se observa la FIGURA 8 del apartado 10.2 puede apreciarse porque aparece una concentración de tensiones en la esquina del empotramiento, ya que la placa tiende a girar respecto de este punto.

#### 11. CONCLUSIONES

En esta práctica, se han presentado algunas complicaciones en cuanto al análisis de las tensiones máximas ya que la concentración de tensiones en la esquina ha dificultado el estudio de la convergencia de las tensiones. La implementación de un modelo con la esquina suavizada con un radio de 0.2 m ha puesto en evidencia la naturaleza física de la concentración de tensiones, es decir, dichas concentraciones aparecen de forma natural a raíz de la geometría de la estructura. También se ha demostrado que los valores de convergencia de tensiones pueden ser asumidos como correctos, ya que para los modelos con esquina suavizada se ha obtenido resultados muy similares a sin suavizar. No obstante, los resultados de tracciones han sido algo más dispares, menos similares, aunque no es de relevante importancia dado que el valor determinante es el de las tensiones de compresión, por no tener holgura en el problema de optimización planteado.

No se ha realizado una valoración de los esfuerzos cortantes ni momentos dado que el objetivo principal del trabajo era el de determinar la carga crítica que cumplía con ciertas restricciones de tensión. Además, al tratarse de una placa de pequeño espesor, no tiene mucho sentido usar los esfuerzos de cortante, que como se demostró en la práctica 3 tienden a no convergir a valores estables.

Se han presentado los resultados en desplazamientos verticales y giros con el fin de comprobar que la respuesta de la estructura era como cabría esperar. Se observa una gran flexión en la punta del voladizo de la placa de 22 cm aproximadamente. que es demasiado grandes para una placa en servicio, es decir, aunque se cumplan los criterios de tensión, si se tuviera en cuenta la puesta en servicio de la estructura, esta estaría determinada por las flechas y no por las tensiones.

## **12. ASPECTOS TEÓRICOS DE LOS ELEMENTOS PLANOS DE REISSNER-MINDLIN PARA PLACAS DELGADAS**

El desarrollo de este ejercicio se ha realizado bajo las hipótesis de placa gruesa de Reissner-Mindlin. Dichas hipótesis se basan en la consideración de un giro adicional de la sección perpendicular respecto a la superficie media deformada. Esto permite el desacoplamiento de de los giros y los desplazamientos verticales.

En el ejercicio, la relación espesor/ancho es de  $0.25/10 = 0.025 < 0.1$ . Donde el valor de 0.1 es el límite para considerar que una placa es gruesa.

### **12.1 Campo de desplazamientos**

En hipótesis de Reissner-Mindlin, existen tres grados de libertad para los desplazamientos, que son,

$$u(x, y, z) = -z\theta_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_y(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

Donde  $\theta_x$  y  $\theta_y$  son los angulos que definen el giro de la normal. Un punto cualquiera del dominio, podrá desplazarse en cualquiera de las 3 direcciones del espacio.

### **12.2 Campo de deformaciones y tensiones**

Si se aplican las fórmulas de las deformaciones al campo de desplazamientos, se obtiene que la deformación  $\varepsilon_z = 0$  y que el resto de deformaciones queda como sigue,

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xz} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_x$$

$$\gamma_{yz} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_y$$

Obsérvese que las deformaciones tangenciales en xz e yz son constantes y pueden ser expresadas con el giro de la normal respecto a la deformada, pero por razones funcionales se expresa con el giro total y la derivada de la flecha.

Las tensiones que aparecen en una placa de Reissner-Mindlin son de dos tipos, flexión y cortante, que equivalen a multiplicar las deformaciones de flexión y cortante por sus respectivas rigideces,

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_f \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = D\varepsilon$$

### 12.3 Esfuerzos y deformaciones generalizadas

Si se consideran las tensiones de flexión y cortante aplicadas a la fibra media de la placa, se obtienen las tensiones generalizadas que coinciden con los esfuerzos aplicados. Estos esfuerzos no son otra cosa que la multiplicación de las matrices constitutivas generalizadas por las deformaciones generalizadas de flexión y cortante.

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z\sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} \hat{D}_f \hat{\varepsilon}_f \\ \hat{D}'_c \hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} = \hat{D}\hat{\varepsilon}$$

Donde,

$$\hat{D}_f = \frac{t^3}{12} D_f$$

$$\hat{D}'_c = t D'_c$$

## 12.4 Discretización del campo de movimientos - PTV

En primer lugar, se debe determinar el PTV, que nos servirá para imponer el equilibrio en la estructura,

$$\iiint \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \iint \delta u q dA + \sum \delta u_i W_i$$

A partir de aquí, todos los pasos se realizarán en referencias generalizadas, para ello, se determina el vector de movimientos, que contiene los parámetros necesarios para determinar el comportamiento de la estructura y formular el PTV en esfuerzos y deformaciones generalizadas. Este vector de movimientos es,

$$\mathbf{u} = [w, \theta_x, \theta_y]^T$$

La aproximación de este vector se realiza con funciones de forma de la siguiente manera,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} N_i w_i \\ N_i \theta_{xi} \\ N_i \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)}$$

Donde N son las funciones de forma asociadas a cada nodo de la discretización y a el vector de desplazamientos de cada nodo  $\mathbf{a}_i = [w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}]^T$ . Directamente aplicando las fórmulas para la obtención de las deformaciones se pueden obtener las deformaciones generalizadas en la forma de elementos finitos con un poco de algebra,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B} \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \end{Bmatrix}$$

Donde B es una matriz  $5n \times 3n$  que deriva convenientemente las funciones de forma para obtener la expresión de las deformaciones generalizadas. Esta matriz puede ser subdividida en dos matrices menores para cada nodo de forma que tenemos deformaciones de flexión y de cortante,

$$\mathbf{B}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{fi} \\ \mathbf{B}_{ci} \end{Bmatrix}$$

## 12.5 Obtención matriz de rigidez

Finalmente, aplicando el vector de movimiento y de deformaciones generalizadas al PTV, obtenemos una expresión de la que podremos obtener la matriz de rigidez de la estructura.

$$\left[ \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B} dA \right] \mathbf{a}^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} \mathbf{N} t dA = q^{(e)}$$

Equivalentemente,

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}$$

y,

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_j dA$$

Donde la matriz de rigidez puede ser expresada como la suma de una matriz de rigidez a flexión y otra a cortante,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_f^{(e)} + \mathbf{K}_c^{(e)}$$

### 12.6 Consideración de bloqueo por cortante

Si se saca factor común de las matrices de rigidez a flexión y a cortante se observa que la matriz de rigidez a flexión es directamente proporcional al cubo del espesor, mientras que la de cortante lo es directamente al espesor,

$$\mathbf{K}_f \sim t^3$$

$$\mathbf{K}_c \sim t$$

Esto genera, que a medida que se disminuye el espesor, la matriz de rigidez a cortante gana peso sobre la matriz de flexión y genera que los desplazamientos se "bloqueen", es decir, que se subestimen los desplazamientos verticales reales. En particular, para placas de pequeño espesor, este problema aparece inherente en la formulación con elementos de Reissner-Mindlin, debiendo adoptar alguna medida para solucionar dicha distorsión en los cálculos. Existen principalmente dos soluciones posibles,

- Refinar la malla, con lo que se consigue una relación espesor/ancho mayor y se puede asumir que la placa se comportará como placa gruesa.
- Integrar las funciones de forma con un número de puntos de gauss inferior a los necesarios para una integración exacta. A esto se le llama integración reducida y permite que la matriz de rigidez a cortante sea singular, con lo que su peso será nulo. Para determinar si la matriz  $\mathbf{K}_c$  es singular, se usa un simple cálculo, conocido como el índice de coacción (IC).

$$IC = NDOF - NPG \cdot N\boldsymbol{\epsilon}_c$$

Donde,

NDOF, es el número de grados de libertad

NPG, es el número de puntos de Gauss usados

$N\boldsymbol{\epsilon}_c$ , es el número de componentes en el vector de deformación por cortante, en este caso 2